

# Aplicación de Algoritmos de Optimización de Funciones No Lineales en Problemas de Mecánica de Fluidos. Un enfoque desde la complejidad

Wilson RODRÍGUEZ CALDERÓN

Programa de Ingeniería Civil  
Universidad de La Salle  
Bogotá, Colombia

Myriam Rocío PALLARES MUÑOZ

Facultad de Ingeniería Civil  
Universidad Santo Tomás  
Bogotá, Colombia

## Resumen

El artículo presenta una comparación entre los métodos de búsqueda (Método de Fibonacci y Sección Dorada) y los métodos de aproximación o de estimación de puntos (Método de Powell, Métodos DSC-Powell y Método de la Media Aritmética). Dicha comparación se realiza a nivel de resultados y de un índice de costo computacional denominado NEFO (número de evaluaciones de la función objetivo). El caso particular en el que se prueban los diferentes métodos corresponde al estudio de un problema de mecánica de fluidos relacionado con el equilibrio de compuertas en el que se busca encontrar el ángulo máximo de la compuerta para mantener un equilibrio estable. Este problema presenta como ventaja la posibilidad de solución analítica que sirve como referente para calcular porcentajes reales de variación y de esta manera validar los resultados.

**Palabras Clave:** Optimización, Métodos de Búsqueda de Funciones de Variable Simple, Métodos de aproximación polinomial o estimación de puntos, Equilibrio de Compuertas, GNU PLOT, OCTAVE.

## 1. Introducción

Cuando se quiere minimizar o maximizar una función existen diversas formas de hacerlo a través de métodos gráficos y analíticos, sin embargo, estos pueden ser algo imprecisos o tediosos respectivamente, además en muchos casos suelen ser poco prácticos, por tanto se recurren a técnicas numéricas de optimización que permitan hallar máximos y mínimos locales con cierta eficacia. Dentro de estas técnicas se encuentran dos grandes familias de métodos: los de Búsqueda (Método de Fibonacci y Sección Dorada o Áurea, Entre otros) y los basados en técnicas de aproximación o estimación de puntos (Método Cuadrático, Método Cúbico, Método Davies, Swam y Campey – DSC, Método Powell de Interpolación cuadrática, DSC-Powell, Método de Media Aritmética) [4].

El artículo aborda la comparación entre los métodos mencionados a nivel de resultados y de un índice de costo computacional denominado NEFO (número de evaluaciones de la función objetivo). El caso particular de estudio corresponde al problema de equilibrio de compuertas en el que se busca encontrar el ángulo máximo de la compuerta para mantener equilibrio estable.

## 2. Marco Teórico

El primer método de estudio es el método de la sección dorada o sección áurea. Se basa en la regla del mismo nombre. Esta regla plantea la división de un intervalo  $S$  en dos intervalos desiguales ( $S_1 > S_2$ ) que cumplen las siguientes proporciones: la razón del más pequeño ( $S_2$ ) al más grande ( $S_1$ ) es a la razón entre el más grande ( $S_1$ ) y el intervalo a dividir ( $S$ ) (ver Fig. 1). Matemáticamente esto se escribe en términos de la expresión (1).

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{S_1}{S} \quad (1)$$

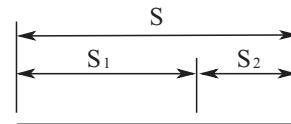


Fig. 1: Regla de la Sección Dorada aplicada al método del mismo nombre

Pero sabemos que,

$$S = S_1 + S_2 \quad (2)$$

Si se reemplaza (2) en (1) y se simplifica se obtiene la expresión:

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 + \frac{S_2}{S_1} = 1 \quad (3)$$

Sustituyendo  $C = S_2/S_1$  en (3), tenemos que,

$$C^2 + C = 1 \quad (4)$$

La solución positiva de (4) es  $C = 0.6180$ . Al aplicar esta regla en la búsqueda, el intervalo de incertidumbre se reduce por el valor de la constante  $C = 0.6180$ . Las fronteras de la región de búsqueda inicial pueden denotarse por  $b_l$  para el límite inferior y  $b_u$  para el límite superior. Por tanto, el intervalo de incertidumbre para la búsqueda,  $I$  está dado por,

$$I = b_u - b_l \quad (5)$$

Teniendo este intervalo se localizan dos nuevos puntos empleando la regla de la sección dorada como se muestra en la fig. 2. De allí se obtiene,

$$x_1 = b_u - C * I \quad (6)$$

$$x_2 = b_l + C * I \quad (7)$$

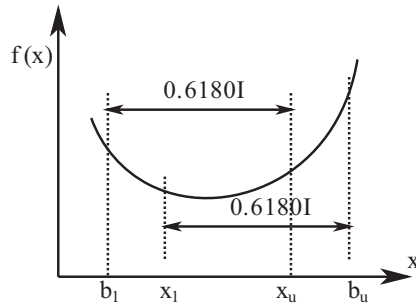


Fig. 2: Método de búsqueda de la Sección Dorada

Con  $C=0.6180$ . Ahora es necesario evaluar la función en los puntos  $x_1$  y  $x_u$  para decidir cuál es la nueva región de búsqueda. El criterio usado para minimizar (lo contrario si se quiere maximizar) compara el valor de la función en los puntos mencionados, luego si  $f(x_1) < f(x_u)$  la búsqueda queda confinada dentro de región a la derecha de  $x=x_1$  (región  $[x_1, b_u]$ ), y en caso contrario, la región de confinamiento se encuentra a la izquierda de  $x=x_u$  (región  $[b_l, x_u]$ ). Esto redefine el intervalo de incertidumbre para la búsqueda I, y por tanto los valores de  $x_1$  y  $x_u$ . Se vuelve a aplicar el criterio para la eliminación de regiones y así sucesivamente hasta que se cumpla cierto nivel de tolerancia respecto al error absoluto o relativo de la solución [8] [9].

Por su parte, en el método de eliminación de regiones de Fibonacci, el intervalo de búsqueda se reduce de acuerdo a la serie que se atribuye a Leonardo Pisano Fibonacci, un matemático del 1200 de nuestra era.

La propiedad de los números de Fibonacci es que, dados dos números consecutivos  $F_{n-2}$  y  $F_{n-1}$ , el tercer número se calcula usando la regla de la expresión (8).

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (8)$$

Donde,  $n = 2, 3, 4, \dots$

Los primeros números de Fibonacci son:  $F_0=1, F_1=1, F_2=2, F_3=3, F_4=5, F_5=8, F_6=13$  y así sucesivamente.

Los números de Fibonacci pueden usarse para crear un algoritmo de búsqueda que requiera sólo una evaluación de la función objetivo en cada iteración. El principio de la búsqueda de Fibonacci consiste en que, de dos puntos requeridos para el uso de la propiedad de eliminación de regiones uno es siempre el punto previo y el otro punto es nuevo. Por ende, sólo se requiere una evaluación de la función en cada iteración [7].

En la iteración k, se eligen dos puntos intermedios, cada uno de los cuales está a una distancia  $L_k^*$  de cada extremo del espacio de búsqueda ( $L=b-a$ ). Cuando la propiedad o criterio de eliminación de regiones elimina una porción del espacio de

búsqueda, el espacio de búsqueda restante es  $L_k$ . Definiendo

$L_k^* = (F_{n-k+1}/F_{n+1})/L$  y  $L_k = (F_{n-k+2}/F_{n+1})/L$  se puede mostrar que,

$$L_k - L_k^* = L_{k+1}^* \quad (9)$$

Esto significa que uno de los dos puntos usados en la iteración k se mantiene como uno de los puntos de referencia en la iteración (k + 1).

Es necesario tener en cuenta las siguientes observaciones:

- La función a optimizar debe ser unimodal en el intervalo inicial de búsqueda.
- Este método no puede localizar el óptimo exacto del problema.
- Debe especificarse el número de iteraciones a efectuar o una tolerancia.

Con la búsqueda de Fibonacci, el intervalo se reduce a,

$$\frac{2}{F_{n+1}} xL \quad (10)$$

Nótese que debe calcularse la serie de Fibonacci hasta  $N+1$  al usar este método.

Por otra parte, existen los métodos de aproximación o estimación de puntos, que pueden describirse comenzando por el método de interpolaciones cuadráticas sucesivas de Powell [6].

El método de Powell consiste en aplicar la búsqueda cuadrática

usando tres puntos:  $x_1, x_2, x_3$ , y calcular  $\bar{x}$ , el cual se estima del mínimo de la función y depende únicamente de los tres puntos elegidos ( $x_1, x_2, x_3$ ). De entre los cuatro puntos utilizados por el

método ( $x_1, x_2, x_3, \bar{x}$ ), se retienen los tres mejores y se obtiene una nueva función interpolada  $q(x)$ . El procedimiento continúa hasta que dos estimaciones consecutivas se encuentran muy cerca entre sí.

Aunque el artículo, no usa de manera directa el método de Davies, Swann, y Campey (DSC), si se implementa un híbrido para el cual se utilizan las estrategias del método DSC y Powell, por tanto, se hace necesario describir algunos aspectos importantes del método DSC.

El método DSC, combina la filosofía de los métodos de aproximación y los métodos de búsqueda. La búsqueda de los tres puntos necesarios para aproximar la función con una cuadrática parte de un punto inicial con un paso  $\Delta x$ . El paso siguiente consiste en doblar el tamaño del paso  $\Delta x$  hasta que el punto del mínimo es sobrepasado, esto puede detectarse cuando la función comienza a incrementar su valor, en este instante, la dirección de búsqueda debe invertirse y el valor absoluto del paso actualizado corresponde a la mitad del paso calculado cuando se da el sobrepaso del mínimo. De este último movimiento resultan cuatro puntos, de los cuales se descarta el de valor más alto de función y se prosigue la búsqueda hasta alcanzar el mínimo. La fig. 3 ilustra el proceso de manera gráfica.

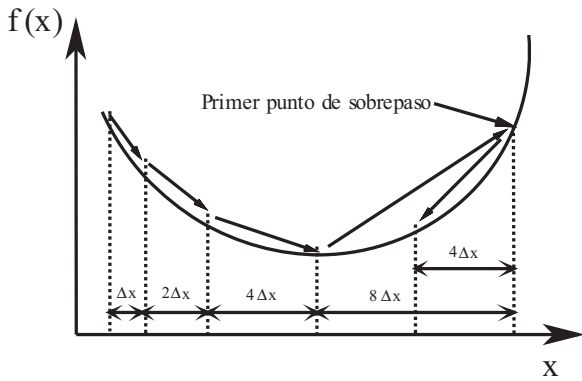


Fig. 3: Método de Interpolación de Davies, Swann, y Campey - DSC.

El método DSC-Powell no requiere que el óptimo este encerrado como en el de Powell. El método DSC converge más rápidamente al mínimo debido a que continuamente dobla el tamaño de paso, por otro lado, se sabe que el método de Powell es superior al método DSC en términos de la rata convergencia, pero como se dijo se debe mantener encerrado el mínimo, por tanto, se combinan las ventajas de los dos métodos obteniendo un método donde se busca encerrar el mínimo usando el método DSC para luego localizar el mínimo mediante el método de Powell [4].

Los métodos descritos hasta ahora tienen ciertas desventajas. Por ejemplo, el método de la sección dorada tiende a alcanzar la solución requerida sin ninguna relación con la función objetivo a ser optimizada. También debido a que los métodos basados en interpolación cuadrática y cúbica son métodos de ajuste curvo, producen resultados insatisfactorios para ciertas funciones.

Para superar estos problemas, Rao y Subbaraj (1988) introdujeron tres poderosos esquemas que emplean la media de un conjunto dado de números: la media aritmética, la media geométrica y la media armónica. Estos métodos son esencialmente los mismos y hacen uso de la propiedad unimodal de la función y la función actual en lugar de aproximar a la función.

Por ejemplo, el método de la media aritmética minimiza el tamaño del paso en dos fases. La primera, establece tres puntos que se unen en el intervalo de incertidumbre del mínimo y su media. La segunda, determina el punto mínimo y su media usando los tres puntos establecidos en la primera.

### 3. Resultados

Para probar la efectividad de los métodos, se trata un problema clásico de mecánica de fluidos en el que se determina el ángulo máximo para el que una compuerta bajo cierto nivel de fluido mantiene un estado de equilibrio estable. Para la solución analítica del problema se recurre a planteamientos clásicos de estática de fluidos y cálculo, posteriormente se determina la solución numérica con los diferentes métodos de optimización descritos y se evalúa la complejidad de cada uno de ellos mediante el parámetro NEFO.

En los dos primeros métodos de búsqueda (Sección áurea y Fibonacci) se presenta una interesante comparación de la curva de convergencia.

### 3.1 Problema de Equilibrio de una Compuerta y su Solución Analítica

El caso de estudio está inspirado en fundamentos propios del clásico libro de mecánica de fluidos de Streeter y Wylie [10]. Una compuerta plana de longitud normal al plano unitaria (fig. 4) de 2000 N de peso y centro de gravedad ubicado a 2 m de la articulación en el punto de rotación O. Se desea encontrar el ángulo  $\phi_{\max}$  con el que la compuerta mantiene equilibrio estable.

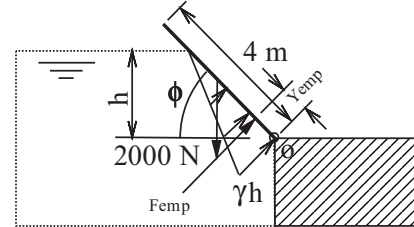


Fig. 4: Esquema de fuerzas para el equilibrio de la compuerta

Se inicia planteando un balance de momentos respecto al punto O,

$$\sum M_o = 0 = -F_{emp} * Y_{emp} + 2000 * 2 * \cos \phi \quad (11)$$

Dado que,  $Y_{emp}$  y  $F_{emp}$  son iguales a la localización del centroide y el volumen del prisma de presión respectivamente se tiene que,

$$F_{emp} = \frac{\gamma h l}{2} \quad , \quad Y_{emp} = \frac{h}{3 \sin \phi} \quad (12)$$

Sabiendo que la longitud ( $l=4$ ), reemplazando (12) en (11) y realizando simplificaciones y transposiciones de términos se obtiene h como función de  $\phi$ ,

$$h = \sqrt[3]{2.447 \sin^2 \phi \cos \phi} \quad (13)$$

Al graficar la función (fig. 5 obtenida usando el software libre de graficación GNUPLOT) puede verse que posee un máximo contenido entre  $\phi=50^\circ$  y  $\phi=60^\circ$  aproximadamente, por tanto el  $\phi_{\max}$  puede determinarse analíticamente derivando la función h con respecto a  $\phi$  e igualando a cero,

$$\frac{1}{3} (2.447 \sin^2 \phi \cos \phi)^{-2/3} \sqrt[3]{2.447} [2 \sin \phi \cos^2 \phi - \sin \phi] = 0 \quad (14)$$

De (14) se deduce que el término en corchetes debe ser igual a cero, por tanto, si se realizan las manipulaciones algebraicas pertinentes y usando la identidad  $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$ , se obtiene el ángulo  $\phi$  que hace que h sea máximo bajo condiciones estables,

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad , \quad \phi_{\max} = 54,735610317245 \quad (15)$$

El problema es muy útil para el análisis de la complejidad de los métodos de optimización, por cuanto se tiene un valor de referencia analítico que permite obtener porcentajes de error sobre la solución obtenida con los diferentes métodos.

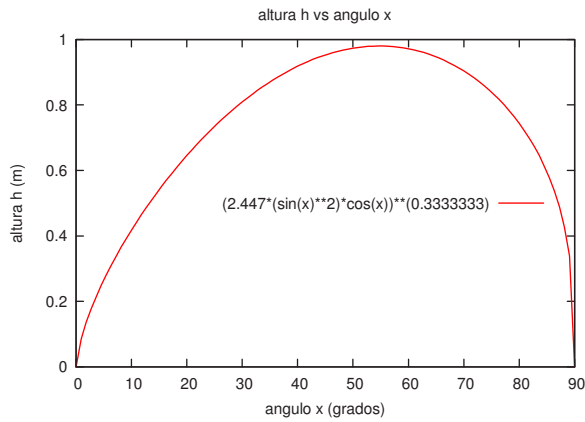


Fig. 5: Altura (h) nivel de agua Vs. Ángulo de la compuerta (x)

### 3.2 Solución del Problema de Equilibrio de una Compuerta por Técnicas de Optimización

Se emplearon tanto métodos de búsqueda (Sección Área, Fibonacci), como métodos de aproximación o estimación de puntos (Powell, DSC-Powell, Media Aritmética).

El desarrollo de los códigos de cada uno de los métodos es llevado a cabo empleando el Sistema de Álgebra Computacional “CAS” libre OCTAVE. El artículo destaca el desarrollo de códigos propios adaptados a las necesidades de docencia e investigación en el medio local. En el caso del problema solucionado mediante técnicas numéricas de optimización es necesario evaluar la complejidad de los algoritmos, para esto se incorporan directamente contadores que determinan el número exacto de evaluaciones de la función objetivo requeridas para llegar a cierto nivel de tolerancia.

El costo computacional indudablemente está altamente influenciado por el número de evaluaciones de la función objetivo (NEFO) dado que, en términos generales, se busca minimizar o maximizar una función de cierta complejidad en cuanto a número de operaciones y tipo de funciones básicas comprometidas (funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, entre otras). Se hacen diferentes pruebas cambiando el paso y determinando su incidencia en el indicador NEFO y en el resultado del punto donde se presenta el máximo de la función altura (h).

Dado que los algoritmos investigados originalmente han sido formulados para la minimización de funciones y que el problema a resolver consiste en la maximización de la función altura (h), se realiza una modificación simple y clásica en optimización que consiste en cambiar el signo de la función original y con ello poder usar los métodos para obtener el  $\phi_{\max}$  reportado como  $X_{\min}$  en las salidas de los códigos desarrollados (solamente los métodos de búsqueda de Fibonacci y Sección Dorada fueron adaptados para resolver el problema de maximización de una función).

De manera preliminar se comparan los dos métodos de búsqueda estudiados (Sección Dorada y Fibonacci). Esta operación se realiza calculando el error relativo de la solución en cada iteración y graficando la curva de convergencia (fig. 6).

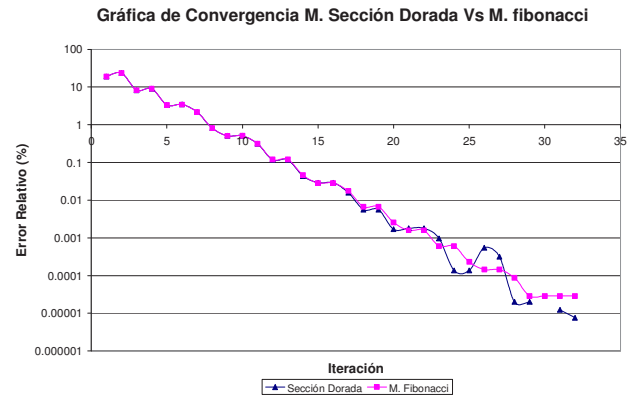


Fig. 6: Convergencia de los Métodos de Fibonacci y Sección Dorada, en escala semilogarítmica

Resulta interesante observar la forma en que las curvas de convergencia de los métodos de Sección Dorada y Fibonacci coinciden en las primeras dieciséis iteraciones de manera aproximada. No obstante, Fibonacci presenta menos oscilaciones en las iteraciones finales, que genera más estabilidad en la solución y que finalmente se obtenga un resultado ligeramente mejor. La pendiente de las curvas es similar y ello puede sugerir que ambos métodos presentan una convergencia similar, además, tiende a ser lineal.

En las tablas 1 y 2, se presenta la evaluación del costo computacional de los algoritmos empleando el parámetro NEFO y los resultados obtenidos para  $X_{\min}$ .

Tabla 1: Evaluación del costo computacional de los algoritmos para diferentes pasos mediante el NEFO

Método	PASO	NEFO
Sección Dorada	---	29
Fibonacci	---	29
Powell	0.5	56
Powell	0.3	35
Powell	0.1	42
Powell	0.05	42
DSC-Powell	0.5	24
DSC-Powell	0.3	26
DSC-Powell	0.1	27
DSC-Powell	0.05	28
Media Aritmética	0.5	14
Media Aritmética	0.3	14
Media Aritmética	0.1	16
Media Aritmética	0.05	17

Los resultados de la tabla 1 llevan a colegir que los algoritmos de búsqueda: sección Dorada y Fibonacci, presentan un mayor NEFO que los algoritmos de aproximación, a excepción del método de Powell. A su vez se observa que el Método de Fibonacci y el de Sección Dorada llegan a resultados similares bajo el mismo valor del índice NEFO, sin embargo, debe tenerse en cuenta que en el método de Fibonacci es necesario calcular y almacenar los números del mismo nombre lo que agrega mayor complejidad al algoritmo; este detalle hace que en general el método de Fibonacci tenga un mayor costo computacional que la Sección Dorada. Por otra parte, entre los

métodos de aproximación el de mayor costo computacional es el método de Powell, seguido por el método DSC-Powell y finalmente el método de la media aritmética.

El método de Powell exhibe un comportamiento interesante del NEFO. Puede observarse que un paso pequeño de 0.05 genera una reducción significativa del NEFO respecto al valor obtenido con un paso diez veces mayor. El Método DSC-Powell revela una reducción importante del NEFO con respecto al método Powell. Además, se observa que el tamaño del paso no tiene una incidencia importante en el NEFO. Por último, el método de la media aritmética presenta mejoras importantes con respecto a sus predecesores y además muestra que la reducción en el paso no incide de manera sustantiva sobre el NEFO. Es importante acotar a este nivel, que las pruebas se realizaron tomando en todos los casos como punto de partida el valor de cero y que la tolerancia especificada sobre el error absoluto de la solución tomó un valor de  $1 \cdot 10^{-6}$ .

Tabla 2: Evaluación del resultado obtenido con los algoritmos para un paso adecuado de 0.05 en el caso de los métodos de Powell, DSC-Powell y Media Aritmética. (Tolerancia =  $1 \cdot 10^{-6}$ )

Método	$X_{\min}$ Numérico	$X_{\min}$ Grados	% Variación
Sección Dorada	0.95531749	54.735660	0.000090990
Fibonacci	0.95531677	54.735619	0.000015853
Powell	0.95502128	54.718689	0.030915209
DSC-Powell	0.92431440	52.959314	3.245229648
Media Aritmética	0.95552507	54.747554	0.021820187

En la tabla 2 se observa que los mejores resultados para el nivel de tolerancia especificado los consiguen los métodos de búsqueda de Fibonacci y Sección Dorada, en su orden, no obstante, poseen un costo alto entre los métodos analizados. De los algoritmos de aproximación probados, el de mejor desempeño aparente es el de media aritmética; además utiliza la menor cantidad de evaluaciones de la función objetivo, que para efectos prácticos es bastante ventajoso si se tiene en cuenta que el valor del ángulo en grados no cambia significativamente respecto al valor exacto obtenido por vía analítica. Por su parte, el método DSC-Powell, aunque logra reducir el NEFO de manera importante, presenta un error que induce dudas sobre la conveniencia de usarlo en el caso de estudio; sin embargo, es conocido por investigaciones de diferentes autores de la década de los 90s que el método DSC-Powell produce los mejores resultados con el menor tiempo computacional cuando la función a optimizar es cuadrática, situación que no ocurre, si el polinomio es de grado superior ya que el método mantiene su competitividad en costo computacional pero no logra alcanzar resultados suficientemente precisos.

#### 4. Conclusiones

El problema de estabilidad de compuertas es muy útil para el análisis de la complejidad de los métodos de optimización evaluados, por cuanto se tiene un valor de referencia analítico que permite obtener porcentajes de error sobre la solución obtenida con los diferentes métodos; además el problema de compuertas tiene una connotación muy práctica en la contención de fluidos y estructuras hidráulicas. Por otra parte, las dos filosofías de métodos discutidas: los algoritmos de búsqueda y los de aproximación y sus híbridos, muestran

ventajas y desventajas (discutidas en los resultados). Finalmente, la lección que nos deja este análisis, es que ningún método es totalmente superior a otro y debe reconocerse los ámbitos de uso de cada uno de ellos para contar con una batería de herramientas disponibles para la solución de un rango importante de aplicaciones en ciencias e ingeniería.

Es importante destacar el impacto de los resultados obtenidos por medio de desarrollos propios implementados con Software Libre poco explorados en nuestro medio, pero de un poder de cálculo interesante para las restricciones económicas propias de la región. A partir de los desarrollos realizados en esta investigación se abre una ventana de posibilidades para futuros trabajos en la misma línea donde se exploren las alternativas de uso de CAS libre en modelos de optimización aplicados en Ciencias e Ingeniería.

#### 5. Referencias

- [1] C. Onwubiko, Mathematical model for setting up a CAD/CAM laboratory, Annual Central Texas Engineering Conference; CAD/Cam, The University of Texas at Austin, July 19-21, 1984.
- [2] C. Onwubiko, Foundations of computer aided design, St Paul, Minn.: Westt, 1989.
- [3] J. H. Mathews, K. D. Fink, Métodos Numéricos con Matlab, Madrid: Pearson, 2000, pp. 433-438.
- [4] M. J. D. Powell, An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives." Computer Journal, vol. 7, pp. 155-162, 1964.
- [5] Manual GNU Octave, USA: Edition 3, 2007.
- [6] M. V. C. Rao, P. Subbaraj, New and efficient one-dimensional search schemes for optimization." Engineering Optimization, vol. 13, pp. 293-305, 1988.
- [7] M. V. C. Rao, P. and Subbaraj, On the Performance of one-dimensional search schemes for optimization." Engineering Optimization, vol. 16, pp. 191-204, 1990.
- [8] R. Fletcher, Practical Methods of Optimization: Unconstrained Optimization, vol. I. New York: Wiley, 1960.
- [9] S. C. Chapra, R. P. Canale, Métodos numéricos para ingenieros, México: McGraw-Hill, 2007, pp. 364-375.
- [10] S. Víctor, W. E. Benjamín, Mecánica de los Fluidos México: McGraw-Hill, 1998, pp. 25-63.

#### 6. Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento a la Universidad de La Salle e Universidad Santo Tomás, por el apoyo brindado en la actividad investigativa de los profesores adscritos a los grupos CIMON y SICON que participan en esta publicación.

#### 7. Biografías

**Myriam Rocío Pallares Muñoz:** Ingeniera Civil de la Universidad Industrial de Santander, Especialista en Gerencia de Proyectos de ESING, Magister en Métodos Numéricos para Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña. Directora e investigadora del grupo de I+D en Simulación y Control Numérico – SICON (USTA). Profesora y Coordinadora de Investigaciones de la Facultad de Ingeniería Civil – USTA. Sus

áreas de interés se centran en: Métodos Numéricos Aplicados a La Ingeniería, Elementos Finitos, Optimización Aplicada a la ingeniería, Modelación Numérica de fenómenos y procesos. Email: myriampallares@usantotomas.edu.co

**Wilson Rodríguez Calderón:** Ingeniero Civil de la Universidad Industrial de Santander, Especialista en Gerencia de Proyectos de ESING, Magister en Métodos Numéricos para Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña. Director e investigador del Centro de Investigación en Modelación Numérica y Desarrollo de Software CAE - CIMON (UNISALLE). Profesor Investigador del programa de Ingeniería Civil – UNISALLE. Sus áreas de interés se centran en: Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería, Elementos Finitos, Optimización aplicada a la ingeniería, Modelación Numérica de Fenómenos y Procesos, Desarrollo de Software CAE. Email: wrodriguez@unisalle.edu.co