

La Matemática Recreativa como herramienta para el aprendizaje

José Olarrea¹, Juan Carlos Nuño² y Fernando Blasco²

¹Departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos. Universidad Politécnica de Madrid
Madrid, España

²Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Universidad Politécnica de Madrid
Madrid, España

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas en la Universidad y, en particular, en las Escuelas Técnicas está basada, fundamentalmente, en el concepto de *utilidad*. La presentación de los contenidos de las asignaturas de matemáticas en Ingenierías, por ejemplo, no se fundamenta en su valor intrínseco sino en que “son útiles” para el desarrollo de la correspondiente rama Técnica que se estudia, o “necesarias” para alcanzar un cierto nivel de conocimientos aplicados.

Presentamos en este artículo una propuesta alternativa sobre cómo incentivar al estudiante universitario en la adquisición de los conocimientos matemáticos. El enfoque “clásico” definido anteriormente propone las matemáticas como un “mal necesario”, lo que, a nuestro juicio, tiene un claro efecto desmotivador en el estudiante. Sin embargo, a lo largo de la historia la matemática ha rezumado un claro sabor lúdico que apenas es aprovechado en la labor docente.

Por último, describimos la propuesta de un nuevo Máster en Educación Matemática de la Universidad Politécnica de Madrid. La nueva legislación española exige al futuro profesorado de enseñanzas medias, bachillerato y formación profesional la obtención del título de máster en educación como éste. En el programa elaborado, la matemática

recreativa se incluye al mismo nivel que otras materias necesarias para la formación del docente.

1. INTRODUCCIÓN

Está extendida la idea de que existen dos matemáticas: la seria y académica, que es la que se estudia en nuestras aulas y la otra, la que propone juegos y sorpresas, un divertimento que no está a la altura de la anterior. Nada más lejos de la realidad. Como señala M. de Guzmán [1], los más grandes matemáticos han sido observadores, inventores y desarrolladores de juegos y sus elucubraciones han dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy se considera matemática profundamente seria y rigurosa.

Las matemáticas han sido entendidas y utilizadas a lo largo de la historia de forma muy diversa. Se han desarrollado paralelamente a nuestra visión del Universo. Nacieron con un carácter mágico y adivinatorio. Han servido como camino de acercamiento a la divinidad y como elemento organizador del pensamiento y, ya en el Renacimiento, se manifestaron como nuestra más versátil y potente herramienta para la exploración de la naturaleza. Pero también han constituido una guía para el pensamiento filosófico, un instrumento creador de belleza y un campo de ejercicio lúdico [2].

En lo tocante a la didáctica de las matemáticas, la evolución ha sido mucha más lenta. A principios del siglo XX Félix Klein propuso una renovación en las enseñanzas medias en sus lecciones sobre matemática elemental [3]. En los años 60 y 70 del siglo XX se optó mayoritariamente por un modelo en el que primaban las estructuras abstractas y el rigor lógico frente a la intuición. Se primó el álgebra, donde este enfoque es más fácil de implementar, en contra de la geometría, con problemas quizá más interesantes y formativos, pero más difícil de fundamentar rigurosamente. En la actualidad este modelo se está poniendo cada vez más en entredicho en la educación primaria y media, aunque se mantiene todavía en la educación superior. Más allá de estas consideraciones sobre los contenidos adecuados en la formación matemática, nuestra posición está más basada en la motivación para el aprendizaje.

La motivación es la fuerza que induce a una persona a realizar cualquier acción consciente. Estamos motivados cuando tenemos la voluntad de hacer algo y, además, somos capaces de perseverar en el esfuerzo que ese algo requiera durante el tiempo necesario para conseguir el objetivo que nos hayamos propuesto [4]. En el caso de la enseñanza nos referimos a la estimulación de la voluntad de aprender. Es el interés del alumno por su propio aprendizaje o por las actividades que le conducen a él. Es labor del profesor crear un entorno adecuado para el desarrollo y mantenimiento de esta voluntad, ya que sin motivación no puede haber aprendizaje.

Es aquí donde el aspecto lúdico de las matemáticas puede y, según nuestro entendimiento, debe ser un arma fundamental en la metodología docente.

2. LA METODOLOGÍA DIDÁCTICA EN LA MATEMÁTICA SUPERIOR

La actualización de la oferta formativa en la Universidad dentro del nuevo Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) no consiste en un simple cambio de contenidos en los estudios o de la estructura de nuestras titulaciones [5]. Por el contrario, el principal cambio que debemos afrontar es el de la metodología educativa, con el propósito de lograr un aprendizaje más efectivo. En esta dirección nos parece crucial reorientar nuestras actuaciones para dar más protagonismo al alumno que, en ningún caso, puede ser un sujeto pasivo del proceso.

En el caso de las matemáticas superiores la herramienta docente fundamental ha sido tradicionalmente la *clase magistral*. La estructura actual de los nuevos planes de estudios apuesta por una reducción de las horas presenciales y un aumento de las horas de trabajo individual y colectivo del alumnado en el aula y fuera de ella. La clase magistral sigue siendo una opción excelente para una asignatura de este tipo. A menudo tiende a menospreciarse, quizá porque la imagen más extendida de este tipo de clases es la de una *mala* clase magistral en la que el profesor se limita a repetir y transcribir en la pizarra los contenidos de la asignatura. Sin embargo es posible aprovechar las horas de aula de manera más efectiva si los alumnos disponen del material adecuado (apuntes, libros, etc.) con anterioridad y se huye de las innecesarias repeticiones. Precisamente son los recursos que se liberan reduciendo el tiempo dedicado a esta modalidad los que permiten introducir otras actuaciones.

El complemento ideal de la lección magistral es el de aprendizaje basado en proyectos, casos y problemas. Es cierto, sin embargo, que la masificación en las aulas y el elevado número de alumnos por cada profesor en algunas asignaturas podría hacer inviables algunas de las propuestas típicas del aprendizaje centrado en el alumno. Por otro lado, también es cierto que favorecer la formación activa de los estudiantes puede liberar a los profesores de parte de sus tareas.

Para la organización e implementación de estas iniciativas, que se desarrollan fuera del aula, es muy conveniente el empleo de plataformas que permitan la modalidad mixta o *b-learning*. En nuestro caso se emplea tanto la plataforma *Moodle* disponible en la U.P.M. como otros recursos externos. Además hemos creado diversos grupos en Google en los que se desarrolla parte de la actividad de la asignatura y una *WIKI* para la realización de tareas colaborativas [6].

El uso de estas herramientas permite además potenciar la dimensión práctica de la asignatura frente a una posición excesivamente teórica que, en una titulación técnica, no tendría demasiado sentido. Planteamos el uso de metodologías activas, estudio de casos y resolución de problemas. Creemos que aquí está la clave de los planteamientos didácticos que subyacen al EEES: dar mayor protagonismo al estudiante en su formación, fomentar el trabajo en colaboración, organizar la enseñanza en torno a las competencias que se deban adquirir y potenciar la

adquisición de herramientas de aprendizaje autónomo [5].

El seguimiento personalizado en la resolución de las tareas propuestas (presentación teórica en clase, resolución de problemas, ampliación de contenidos, búsqueda guiada de aplicaciones y relaciones con otras materias y asignaturas) no es viable si el número de alumnos es elevado. Sin embargo, el planteamiento de trabajo en grupo permite implementar estas tareas a la vez que fomenta el desarrollo de otras competencias transversales.

La clave para la efectividad de estas propuestas es, y este es el punto central de nuestras tesis, obtener y mantener el interés del alumno. Más allá de que nadie puede dudar de la utilidad y necesidad de las matemáticas para poder acceder e instrumentalizar otros conocimientos técnicos y científicos, solo podemos lograr una respuesta positiva de nuestros estudiantes si logramos que perciban la belleza e interés que la matemática tiene *per se*.

El juego y la recreación matemática constituyen un arma fundamental para poder alcanzar esta respuesta deseada. Desde luego, tanto uno como la otra, y como puede comprobarse echando un vistazo a la historia misma de las matemáticas, no la trivializan, sino que la engrandecen, formando parte de su propia naturaleza.

3. MATEMÁTICA RECREATIVA

La matemática y los juegos han estado siempre unidos. No solo gran número de juegos –y probablemente los más interesantes– tienen un contenido matemático profundo, sino que muchos campos de la matemática están ligados al juego o, incluso, han tenido su origen en el estudio de éste.

Existe una literatura amplísima sobre esta relación que cubre prácticamente todas las áreas de la matemática. Es fácil encontrar problemas “serios” y relevantes y, sobre todo, útiles para desarrollar el pensamiento matemático y enormemente motivadores que pueden utilizarse en todas las asignaturas de carácter matemático que figuran en nuestros planes de estudios.

Nada sorprendente si se piensa en el impacto del juego en la historia de las matemáticas: Euclides empleó la fuerza pedagógica de la sorpresa producida por la falacia en su obra *Pseudaria* (engaños); los trabajos de Leonardo de Pisa (Fibonacci o *Stupor Mundi*) rezuman el aroma de

juegos numéricos; Cardano escribió el *Liber De Ludo Aleae*, libro sobre los juegos de azar que anticipó en más de cien años el nacimiento de la Teoría de la Probabilidad; Pascal y Fermat fundamentaron el nacimiento de ésta en sus cartas iniciadas por un problema sobre el correcto reparto de las apuestas en un juego de azar propuesto por Antoine Gobaud, caballero de Meré; Leibniz escribía en una carta: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente"; Euler inició la Teoría de Grafos al enfrentarse al problema de un hipotético paseo por la ciudad de Königsberg en el que se recorriera una sola vez cada uno de sus siete puentes; Hamilton comercializó un juego (y hay quien afirma que con él consiguió su única publicación remunerada); Gauss era más que aficionado a los juegos de cartas, etc. Más recientemente, pocas teorías matemáticas han encontrado más aplicaciones en Economía, Teoría de la Evolución o Ciencias Sociales que la propia Teoría de Juegos, iniciada por Von Neumann y Oskar Morgenstern.

Algunos ejemplos de divertimento relacionado con la matemática cuya utilidad puede sorprender a algún lector son la papiroflexia, y especialmente la papiroflexia modular, que permite abordar el estudio de la geometría aplicada al diseño industrial y la arquitectura [7] o la magia. La relación de la magia con las matemáticas aparece en muchos contextos. Martin Gardner abordó, en su célebre columna de juegos matemáticos en *Scientific American* muchas de las relaciones de estas dos disciplinas. Su libro “Mathematics, Magic and Mystery” es el primero dedicado en exclusiva a la magia matemática y ha servido de inspiración a trabajos más recientes [8].

En resumen, cualquier docente de cualquier asignatura de matemáticas tiene a su disposición un arsenal de juegos, divertimentos y sorpresas matemáticas completamente elaboradas y utilizables en sus clases, siempre que no malinterprete la “seriedad” de su tarea identificándola con una renuncia a la diversión y al estímulo que el juego puede producir en la motivación de sus estudiantes.

Otro aspecto nada desdeñable en la utilización de juegos en las clases de matemáticas es el que se refiere al entrenamiento que proporcionan para la resolución de problemas. Enfrentarse a un juego, estudiar sus reglas y obtener las estrategias más convenientes es equivalente a la metodología

propuesta por Polya en su célebre obra *Cómo plantear y resolver problemas* [7]

4. EL MÁSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE LA UPM

Lo expuesto en la sección anterior es perfectamente aplicable a todas las etapas educativas. Existen juegos que abarcan todos los niveles de complejidad. Desde la enseñanza primaria hasta los cursos superiores universitarios las matemáticas recreativas pueden ser utilizadas para ilustrar los contenidos del curso y, como se comentaba más arriba, mantener un alto grado de motivación.

La nueva legislación española exige al futuro profesorado de enseñanzas medias, bachillerato y formación profesional la obtención del título de máster en educación. Esto significa cursar al menos 60 ECTS repartidos en distintos módulos: general, específico y práctico. La Universidad Politécnica de Madrid, a través de su Instituto de Ciencias de la Educación, ha preparado este máster para su aprobación por la comisión nacional de evaluación.

El máster en educación de la UPM oferta una especialidad en Matemáticas diseñada de manera especial para todos aquellos ingenieros que quieran desarrollar una labor docente en las enseñanzas medias. Esta especialidad de Matemáticas dentro del máster de educación consta de cinco asignaturas obligatorias: *Didáctica del álgebra* (3 ECTS), *Didáctica de la geometría* (4 ECTS), *Didáctica de la estadística* (3 ECTS) y *Didáctica del análisis matemático* (4 ECTS). Además, incluye tres asignaturas optativas una de las cuales se denomina *Matemáticas Recreativas* (las otras dos son *inglés académico-profesional para entornos educativos internacionales* y una asignatura a elegir de otra especialidad). Además, dentro del módulo genérico, el máster programa la asignatura de 3 ECTS: *Las matemáticas: el lenguaje de la Ciencia y la Tecnología* con el principal objetivo de enseñar al docente de las asignaturas científico-técnicas a utilizar y presentar las matemáticas de manera adecuada.

La asignatura *Matemáticas Recreativas* es una asignatura de 3 ECTS y tiene como principal objetivo presentar a los futuros profesores de enseñanza secundaria obligatoria y bachillerato y formación profesional una manera alternativa de enseñar matemáticas mediante juegos, pasatiempos y acertijos de carácter matemático. En este sentido, se ajusta al enfoque que se ha presentado en las secciones precedentes. Las competencias que se quieren conseguir incluyen:

- Reconocer el valor pedagógico de la matemática recreativa para enseñar matemáticas en los distintos niveles de las enseñanzas medias
- Captar la atención de los alumnos mediante matemáticas recreativas e inducir su participación en actividades de carácter matemático.
- Conocer una gran variedad de juegos matemáticos, acertijos, pasatiempos y trucos que han sido relevantes para la historia de la matemática.
- Relacionar juegos y acertijos matemáticos con principios básicos de la matemática.
- Ilustrar temas de los programas de matemáticas mediante matemáticas recreativas y ejemplos lúdicos de la vida cotidiana.
- Enseñar al alumno a representar juegos y pasatiempos matemáticos.
- Elegir juegos adecuados a los programas de las asignaturas de matemáticas.
- Utilizar recursos tecnológicos para hacer matemáticas lúdicas.
- Recrear nuevos problemas matemáticos mediante nuevos juegos, acertijo o trucos.
- Transmitir el valor estético de las matemáticas.

Los contenidos generales de esta asignatura son los siguientes:

1. Juegos matemáticos clásicos: una historia divertida para ser contada.
2. Clases de juegos matemáticos: un repaso a la matemática popular.
3. ¿Cómo elegir un juego?
 - a. Pasatiempos y acertijos para cada edad
 - b. Pasatiempos y acertijos para cada tema.
4. Ventajas y desventajas de utilizar las matemáticas recreativas.

5. Combinando adecuadamente la matemática y la matemática recreativa.
6. Jugando a las matemáticas con el ordenador. Matemáticas recreativas en la red.
7. Matemática recreativa por resolver: problemas que esperan solución.
8. El problema de la evaluación de las actividades lúdicas.

Las actividades de formación y organización que conforman la metodología docente incluyen, además de las naturales tutorías y trabajos en grupo, los debates y representaciones en clase. Por último, la evaluación del aprendizaje será sustentado en los siguientes puntos elementales:

- Aprecia el valor pedagógico de las matemáticas recreativas.
- Programa intercalando matemáticas recreativas en el aula.
- Investiga nuevos recursos recreativos para su utilización en la asignatura.
- Conoce una apreciable variedad de juegos matemáticos.
- Relaciona los recursos lúdicos con problemas básicos de las matemáticas.
- Adapta juegos clásicos a las necesidades actuales del aula.
- Acerca las Matemáticas a la vida real.
- Atrae la atención del estudiante.

El módulo específico se completa con el *practicum*, que en total cubre los 20 ECTS restantes, donde se aplicará el conocimiento teórico aprendido en un contexto real. Este módulo incluye la estancia en algún colegio o instituto (7 ECTS). Parte de estos créditos (4 ECTS) son específicos de la especialidad de Matemáticas y podrán ser utilizados para poner en práctica los juegos y recreaciones matemáticas aprendidas. Es, sin lugar a dudas, el momento clave del aprendizaje. El comienzo de una carrera docente donde se da sentido a lo aprendido en cada una de las asignaturas del máster. En el caso de la matemática recreativa, es la demostración de que enseñar matemáticas se puede convertir en un espectáculo.

5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado por el proyecto de Innovación Educativa **IE09012074** de la Universidad Politécnica de Madrid

6. REFERENCIAS

[1] Miguel de Guzmán. *Juegos Matemáticos en la Enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas Santa Cruz de Tenerife, 10-14 Septiembre 1984

[2] Miguel de Guzmán. *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. Informe para la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI)
<http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm>

[3] Félix Klein. *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. Ed. Nivola (2006)

[4] Anita E. Woolfolk. *Psicología Educativa*. Ed. Prentice Hall (1999)

[5] *Propuestas para la renovación de las metodologías educativas en la universidad* (2006) (http://www.mec.es/educa/ccuniv/html/metodologias/docu/PROPUESTA_RENOVACION.pdf)

[6] <http://groups.google.com/group/ecudif>
<http://groups.google.com/group/estad2010>

[7] D. Mitchell. *Mathematical Origami: Geometrical Shapes by Paper Folding*. Ed. Tarquin (1997)

[8] Fernando Blasco. *Matemagia*. Ed. Temas de Hoy (2007)

[9] G. Polya. *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas (1965)