

# GEOGEBRA Y APPLETS APLICADOS A LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Luis Carlos Rojas \*

Departamento de Ciencias Básicas, Fundación Universitaria Luis Amigó  
Medellín, Antioquia, Colombia

y

Pedro Vicente Esteban \*\*

Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT  
Medellín, Antioquia, Colombia

## RESUMEN

Cada disciplina se caracteriza por tener formas específicas para construir el conocimiento. Si nos referimos al Cálculo, sus contenidos giran en torno a las gráficas en dos y tres dimensiones, por lo que la interpretación, asimilación y comprensión de los conceptos estudiados están asociados con procesos de visualización. Actualmente existen diversas herramientas tecnológicas que permiten potenciar la enseñanza y comprensión de esta rama del conocimiento. Entre éstas se destacan los Applets<sup>1</sup> que se encuentran de forma gratuita en internet y el software Geogebra<sup>2</sup>, que contribuyen de manera significativa a fomentar buenas prácticas de enseñanza y a potenciar la comprensión de otras ramas del conocimiento asociadas con las matemáticas.

En éste artículo, se describen y analizan los alcances de una investigación de carácter pedagógica y tecnológica, llevada a cabo en dos Instituciones de educación superior de la ciudad de Medellín (Colombia), donde analizó el proceso de integración entre pedagogía y herramientas tecnológicas, asociadas con la información y la comunicación (TIC), en las prácticas de enseñanza y

aprendizaje del Cálculo. Como elemento pedagógico se trabajó con la visualización. Las tecnologías utilizadas fueron Applets, seleccionados de páginas de internet, especializados en Cálculo y el software Geogebra. Estas herramientas se utilizaron en el aula de clase y fuera de ella por los docentes y estudiantes, con el objetivo de fortalecer las temáticas tratadas durante el proceso académico.

**Palabras clave:** Cálculo, Applets, Geogebra, Visualización, Comprensión.

## INTRODUCCIÓN

Es claro que vivimos en un mundo cambiante, donde la tecnología forma parte de nuestro día a día, siendo los niños y jóvenes estudiantes los que con mayor frecuencia la utilizan y los que más cómodos se sienten con el uso de ésta. Es por ello que vale la pena plantearse las preguntas ¿Por qué no utilizar diferentes tecnologías en clase de matemáticas? ¿Qué ventajas trae el uso de éstas? ¿Qué y cómo aportan a la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias?

Las matemáticas y más específicamente el cálculo, constituye uno de los más grandes logros intelectuales que ha conseguido el hombre. En Física, Química, Economía, Ingeniería entre otras ramas de las ciencias, sus aplicaciones son diversas: desde planteamientos de modelos matemáticos para optimizar la producción de un producto, pasando por modelos de propagación de enfermedades contagiosas, cálculos del flujo sanguíneo, hasta su aplicación en el espacio para el cálculo de las orbitas de los satélites y de las naves espaciales. De otro

---

\*Magister en Matemática Aplicada, Universidad EAFIT. E-mail: [lorojasfl@eafit.edu.co](mailto:lorojasfl@eafit.edu.co)

\*\*Doctor en Ciencias Matemáticas. Docente Universidad EAFIT. e-mail: [pesteban@eafit.edu.co](mailto:pesteban@eafit.edu.co)

<sup>1</sup> Aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo un navegador web. Ofrece información gráfica y a veces interactúa con el usuario. (tomado de <http://es.wikipedia.org/wiki/Applet>).

<sup>2</sup> Software libre. Disponible en [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

lado, en los nuevos avances tecnológicos, sus aplicaciones se han visto crecer de forma exponencial [3, pp.24-25].

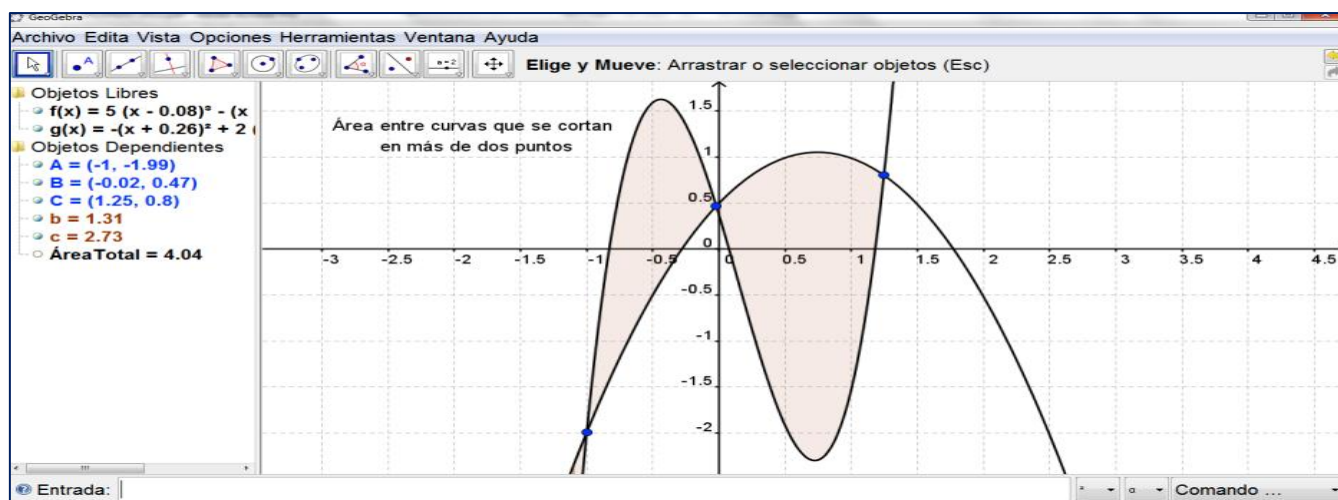
Para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, todavía se encuentra un número significativo de profesores que continúan impartiendo sus clases en forma tradicional<sup>3</sup>, a pesar de que actualmente existen herramientas tecnológicas que permiten potenciar la enseñanza, el entendimiento y la comprensión de esta rama del conocimiento. Así lo avalan numerosas investigaciones, que evidencian, como la inclusión de la tecnología y la pedagogía en el aula de clase apoyan procesos de enseñanza que promueven aprendizajes significativos<sup>4</sup>.

Por lo anterior el principal objetivo a lograr en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en la actualidad, es imponerse a la limitada comprensión de nociones y procedimientos que carecen de un

de herramientas son las más apropiadas y las que mejor se adaptan al tipo de enseñanza del docente.

Es importante partir de la premisa de que la tecnología, por sí misma, no garantiza la formación de mejores estudiantes, es decir, ésta no es un fin, sino un medio que ayuda a optimizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje. El uso de forma concienzuda de la tecnología en cualquier proceso educativo no puede conducir a otra cosa más, que al enriquecimiento y construcción del conocimiento, siempre y cuando este proceso esté acompañado por el docente y subordinado a una concepción pedagógica.

Como menciona Ferrer [2, pp. 3-4], “La tecnología no debe convertirse en el centro de atención hacia donde se enfoque el estudiante, sino el medio a través del cual ocurre el intercambio de información y conocimiento durante el proceso instruccional”. Si



**Figura 1.** Área entre curvas que se cortan en más de dos puntos. Creado en Geogebra.

norte; deben proponerse alternativas basadas en estrategias didácticas, y en el uso de herramientas tecnológicas que propicien un mayor interés en los estudiantes hacia el curso, a fin de involucrarlos en su proceso formativo y animarlos a descubrir y desarrollar nuevas habilidades en función del Cálculo [3, p.21].

Por otro lado, incorporar tecnologías en los procesos de enseñanza, requiere tiempo, organización y preparación. No se trata de elegir cualquier tecnología; es importante discutir y analizar qué tipo

bien, incluir tecnologías en los procesos de enseñanza y de aprendizaje trae consigo muchas ventajas y desafíos; sacar el mayor provecho a éstas, requiere crear ambientes propicios que motiven y generen conocimiento, para lo cual se deben diseñar actividades que estén enmarcadas en su buen uso y que reflejen los alcances de su aplicación en el alumnado.

## IMPORTANCIA DE LA VISUALIZACIÓN EN LA COMPRENSIÓN DEL CÁLCULO

El currículo del cálculo gira en torno a gráficos en dos y tres dimensiones, por lo cual, contar con herramientas tecnológicas que contribuyan a una buena práctica visual en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, garantiza en parte el entendimiento

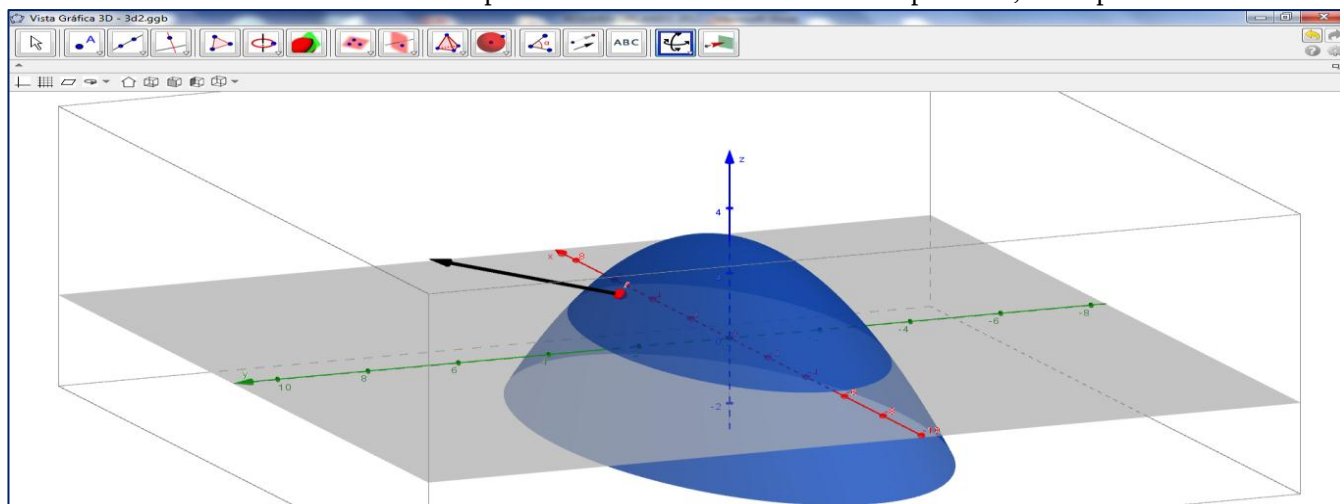
<sup>3</sup> Clase magistral donde la única herramienta utilizada es una pizarra.

<sup>4</sup> Es una propuesta en la que el trabajo escolar está diseñado para superar el memorismo tradicional de las aulas y lograr un aprendizaje más integrador, comprensivo y autónomo.

de los conceptos propios de este curso. Del mismo modo, la unión de expresiones teóricas, analíticas y visuales, potencia considerablemente la comprensión de los conceptos y brinda la oportunidad de indagar y profundizar más a fondo las temáticas relacionadas. Como mencionan Servil y otros [5, pp. 5-6], en cuanto a la inclusión de la tecnología y la importancia de la visualización en el Cálculo: “El papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del Cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente

matemático en el alumnado. La tecnología, junto a este elemento pedagógico, forman un colectivo que facilita abordar y complementar las temáticas desde lo visual como desde lo algebraico. Esta constante retroalimentación que sugiere ahondar los conceptos desde diferentes ángulos, origina gran interés por el alumnado hacia el estudio de las matemáticas.

Visualizar conceptos de esta ciencia por un lado, implica realizar una serie de tareas tales como: observar, organizar, analizar, formular, y articularlos con otros. Y por otro, extrapolarlos a diferentes



**Figura 2.** Vector normal a una superficie. Creado en Geogebra 3d.

verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual”.

Emplear la visualización como herramienta de enseñanza del cálculo, ofrece enormes posibilidades. A los docentes, le permite compartir sus conocimientos desde distintas perspectivas y a los estudiantes, la oportunidad de complementar, abordar y profundizar los conceptos a través de diferentes puntos de vistas (Analítico, visual, evaluativo, aplicativo, entre otras) por ello, la visualización resulta uno de los aspectos esenciales a desarrollar en los estudiantes de cálculo. Como lo define Cantoral, R.et al. [1, p. 18] “A través de la visualización, el alumno logra representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual”. Todos estos aspectos, conllevan al mejoramiento del nivel de enseñanza y de aprendizaje, y por ello, es importante optar por herramientas que ofrezcan un desarrollo visual integral y que se adapten de manera conjunta al currículo y a las necesidades propias del docente y del estudiante.

Promover la visualización como herramienta pedagógica, contribuye a desarrollar el pensamiento

situaciones, de allí, que la comprensión de los conceptos de matemáticas y más concretamente del cálculo este estrechamente relacionada con este elemento pedagógico “la visualización”.

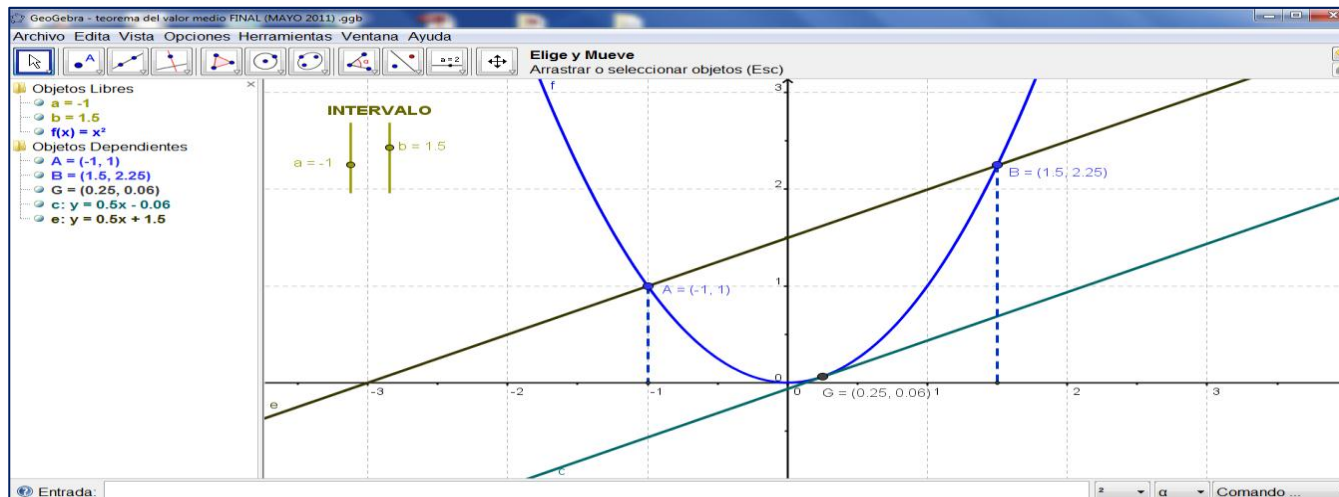
### **LAS TIC UNA HERRAMIENTA QUE FAVORECE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO**

Los cambios sociales, económicos y tecnológicos traen consigo nuevos desafíos para los sistemas educativos, a quienes se les demanda innovaciones, en la manera de enseñar el contenido curricular, las formas de relacionarse con el conocimiento y el tipo de persona al que han de contribuir a formar [4, pp. 17-21]. Este nuevo escenario para la educación, implica una transformación radical de la práctica educativa; por lo tanto, mejorar la calidad en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, se ha convertido en un reto que se han trazado las instituciones en todos los niveles de educación. Muchas de estas instituciones han optado por el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) como herramientas de mejoramiento en la calidad de sus procesos

educativos, diseñando e implementando entornos enfocados en el desarrollo integral de los estudiantes.

Las TIC, aplicadas en forma adecuada en la enseñanza de las matemáticas y más específicamente del Cálculo, promueven un cambio en la manera con la cual se abordan los contenidos

explicación de su funcionamiento. Un ejemplo de esto se muestra en las **Figura 1 y 2**. Los docentes encargados de impartir los cursos, utilizando unos pocos comandos, plasmaron conceptos del cálculo diferencial y vectorial. A su vez, y conforme el alumnado utilizaba el software, creaban sus propias construcciones, que le permitían confrontar los conceptos desde distintas perspectivas.



**Figura 3.** Teorema del valor medio. Applet creado en Geogebra.

de este curso. En internet, existen recursos gratuitos como el software Geogebra y Applets que permiten realizar gráficos en dos y tres dimensiones, hasta la posibilidad de crear aplicaciones para representar un concepto. Del mismo modo, implantar estas herramientas tecnológicas en el aula de cálculo, plantea retos distintos a la repetición de algoritmos, promueve la participación activa del alumnado, creando así ambientes propicios para una constante realimentación de conocimientos.

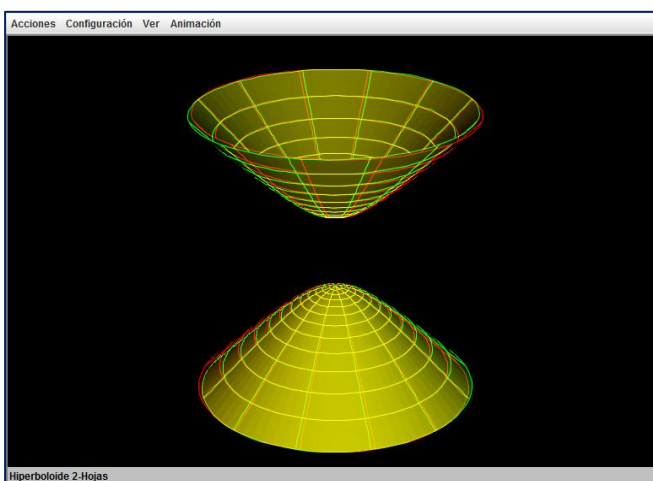
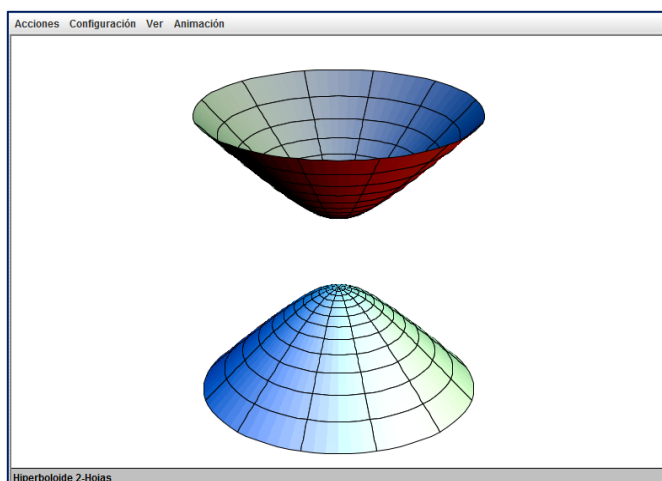
Geogebra es un software libre de matemática para educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. Ha recibido numerosas distinciones y ha sido galardonado en diferentes organizaciones y foros de software educativo<sup>5</sup>.

La interfaz del Geogebra es simple e intuitiva, por lo que no se requiere dedicar extensas sesiones para la

Como se mencionó anteriormente, los Applets fue la otra herramienta tecnológica seleccionada durante el proceso llevado a cabo. Un Applet, es una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo un navegador web. A diferencia de un programa, un Applet no puede ejecutarse de manera independiente, ofrece información gráfica y en muchas ocasiones el usuario puede interactuar con él. Se pueden ejecutar en múltiples plataformas, es decir, son compatibles con varios sistemas operativos (Windows, Mac, Linux, etc.), por lo que su uso, se ha tornado cada día más frecuente.

La **Figura 3**. Muestra un Applet creado por el docente del curso cálculo diferencial utilizando el software Geogebra. Éste Applet, permite visualizar el teorema del valor medio. El mismo, permitió estudiar y analizar ciertas propiedades referentes al estudio de rectas secantes a curvas y a rectas tangentes en puntos de ellas, así como el concepto de la derivada. Estas aplicaciones trajeron consigo muchas ventajas tanto en el aula de clase como fuera de ella. Por ejemplo, permitió al docente y a los estudiantes interactuar en tiempo real con la aplicación, se utilizó como método de estudio, de evaluación y autoevaluación, lo que favoreció en los estudiantes descubrieran gradualmente los contenidos matemáticos subyacentes a éstos y otros conceptos.

<sup>5</sup> Tomado de [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Citado el 15 de agosto de 2012.



**Figura 4.** Applet superficies paramétricas.

Otra de las características importantes de este software, es la opción de guardar los gráficos en formato de imagen, crear hojas dinámicas como página web o desplegar el código fuente del Applet, para luego colgarlo en un blog personal, donde los estudiantes podían ingresar y utilizarlo como si estuviesen en el aula de clase.

En la actualidad, el tiempo destinado a la enseñanza del cálculo resulta a menudo insuficiente. Además de esto, existen algunos conceptos que son de difícil comprensión y necesitan dedicarles más tiempo cuando se utiliza una metodología tradicional. Por esto, se hace necesario contar con herramientas que optimicen el tiempo destinado en el aula de clase. Los Applets, son una excelente opción; con esta herramienta, los docentes logran complementar la explicación de conceptos complejos, presentarlos de una manera rápida, dinámica e interactiva y en consecuencia, ayudar a los alumnos a visualizar el concepto con relativa facilidad. La **Figura 4**<sup>6</sup>, muestra un Applet utilizado en una sesión de clase del cálculo vectorial, esta imagen evidencia la calidad gráfica que puede alcanzar esta herramienta tecnológica. En particular, este Applet permite visualizar gran cantidad de superficies (Imágenes en 3 dimensiones), manipularlas y cambiar la apariencia de la imagen, ya sea en forma sólida o en forma anaglífica; esta última es muy interesante, utilizando unos lentes adecuados (anaglíficos) provoca un efecto tridimensional de la imagen.

## CONCLUSIONES

Emplear Applets y el software Geogebra junto a la visualización como elemento pedagógico, fue un apoyo significativo a través del proceso de enseñanza y de aprendizaje del cálculo. Promovió una buena práctica de la enseñanza y potenció del pensamiento matemático en los estudiantes.

Se evidencio una buena predisposición por parte del alumnado hacia el uso de estos recursos. Su carácter motivador, transformó el rol del alumnado, tuvieron la oportunidad de indagar a fondo los conceptos, buscar respuestas a sus preguntas, convirtiendo de esta manera el proceso de enseñanza y de aprendizaje mucho más activo e interesante para ellos.

El software Geogebra y los Applet, como herramienta pedagógica y didáctica resultó ventajosa, proporcionó mecanismos para salir del tipo de aprendizaje memorístico y repetitivo. Estimuló la experiencia de aprendizaje, y el interés del alumnado hacia el estudio del cálculo.

Emplear Applets y el software Geogebra en el proceso de enseñanza y de aprendizaje del cálculo, creó escenarios que respaldaron creación de conocimiento. Por medio de estas herramientas, los alumnos tuvieron la oportunidad de visualizar, organizar, relacionar, argumentar y descubrir conexiones entre los conceptos y eventos del entorno.

<sup>6</sup> Applet disponible en: <http://3d-xplormath.org/j/applets/es/>. Citado el 16 de agosto de 2012.

## **AGRADECIMIENTOS**

Los autores agradecen a la Fundación Universitaria Luis Amigó (FUNLAM), a la Universidad EAFIT y a todas aquellas personas que de una u otra manera nos han ayudado para que la presente investigación pudiera realizarse.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). Visualización y pensamiento matemático. México.
- [2] Ferrer, J. (2008). El proceso de infusión de la tecnología a la sala de clases. Puerto Rico.
- [3] Rojas, L. & Esteban, P. (2012). Enseñanza del Cálculo Vectorial. Aspectos Pedagógicos y Tecnológicos. Editorial Académica Española, AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG. ISBN: 978-3-8484-6214-8.
- [4] Sancho, J. & Correa, J. (2010). Cambio y continuidad en sistemas educativos en transformación: Revista de Educación, Mayo-Agosto 2010.
- [5] Servil, K., C. K. e. a. (2005). The Role of Visualization Approach on Student's Conceptual Learning. Turquía.