

# Videojuegos y fracciones: ¿una razón para jugar?

Alfonso OLVERA VENTURA  
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN  
Ciudad de México 07360, México

## RESUMEN

Uno de los temas que resultan más conflictivos para los estudiantes durante su educación básica es el de las fracciones. Los estudiantes suelen cometer diversos tipos de errores, no sólo en los cálculos aritméticos sino en tareas que ponen en evidencia un entendimiento inapropiado de lo que las fracciones significan. Un factor que contribuye a estas dificultades tiene que ver con su construcción multifacética, es decir, con los diversos significados que es capaz de exhibir una fracción.

El presente trabajo busca aportar una solución desde un enfoque relativamente nuevo, mediante el uso de un videojuego. *Aritban* se preparó, apoyado en teorías del aprendizaje de fracciones y de diseño de videojuegos educativos, para promover en el estudiante la acomodación de las subconstrucciones de medida y razón, que se pueden entender como la posición de un punto sobre la recta numérica y la relación recíproca entre dos magnitudes, respectivamente.

Al cabo de 4 sesiones de 50 minutos de interacción con *Aritban*, se observó un intento por diversificar las estrategias de comparación de fracciones por parte de los estudiantes, y una reflexión sobre la relación que guardan las dos cantidades involucradas en una fracción.

**Palabras Claves:** Videojuego, Juego educativo, Fracciones, Fracción como medida, Fracción como razón.

## 1. INTRODUCCIÓN

La siguiente proposición no debería resultar polémica. La percepción que los estudiantes tienen de las matemáticas es que son aburridas, difíciles e intrascendentes. Aunque esta es una idea que expresarán de casi cualquier tema cuya relación con las matemáticas les resulte evidente, el tema de las fracciones puede resultarles tan confuso que muy pronto en la formación de su pensamiento matemático adherirán a éste una etiqueta de adjetivos adversos. Y esto no ocurre sin motivo. El esquema de las fracciones es ciertamente complejo. Dependiendo de nuestras necesidades, podemos usar una fracción para representarnos la parte de un todo, un cociente, una razón, una medida o un operador, concibiendo de esta manera dos cantidades en una relación recíproca de tamaños relativos. Pero el enfoque de “partes iguales” al

que suele recurrirse en la educación institucional limita esta relación a la idea de que una cantidad es una parte de un todo, en un sentido de inclusión en el que la parte es necesariamente elemento del todo [3].

Sobre la única base que la subconstrucción parte-todo (a la cual refiere el modelo educativo predominante) puede proveer, el siguiente problema carece de sentido: “En una contienda electoral, el Partido Rojo ha recibido 250 votos y el Partido Azul ha recibido 300 votos. ¿Qué fracción de los votos del Partido Azul representan los votos que recibió el Partido Rojo?” ¡Pero los votos que recibió el Partido Rojo no forman parte de los votos que recibió el Partido Azul!

Esto es, por supuesto, muestra de una comprensión superficial, pues pierde por completo el corazón del esquema de fracciones. El que A sea  $n$  veces tan grande como B implica que B es una  $n$ ésima parte de A. Resolver esta problemática resulta fundamental pues la comprensión de las fracciones es un prerrequisito para el desarrollo de estructuras numéricas y algebraicas en los años posteriores de educación matemática [19].

Mi propuesta es que el videojuego, por su relevancia social y por las características motivacionales y educativas del ejercicio lúdico, puede ser una herramienta en esa solución. De hecho, un videojuego puede atacar directamente los puntos críticos que hacen de las matemáticas en general algo indeseado para los estudiantes, es decir, el hecho de que les parezcan aburridas, difíciles e intrascendentes. Pero antes de entrar de lleno al dominio de la lúdica y los videojuegos, discutiré brevemente las subconstrucciones de medida y razón, pues este es el punto de partida para el diseño de *Aritban*.

## 2. LA MEDIDA Y LA RAZÓN

La hipótesis de la reorganización expuesta por Steffe [17] se opone a la idea popular de que las grandes dificultades que tienen los estudiantes para comprender las fracciones se deba a que el esquema de los números enteros interfiera con la construcción del nuevo esquema. De acuerdo con Steffe el conocimiento de los números racionales emerge del conocimiento previo de los números enteros, en el sentido de que las operaciones del esquema de los enteros deben adaptarse a nuevas

situaciones en las que el esquema de los enteros no es suficiente. Es decir, la tentación de tratar a las fracciones de la misma manera que a los números enteros (que se observa en estudiantes que, por ejemplo, señalan que  $1/3$  es mayor que  $1/2$  porque 3 es mayor que 2) no es en sí misma prueba de una concepción pobre de los números racionales, sino prueba de un proceso incompleto de reorganización de la estructura cognitiva, en la que las fracciones heredan propiedades de los enteros pero sin distinguir aún entre sus distintos propósitos. Así, en tanto el esquema de los números naturales se origina en actividades de conteo y se desarrolla con generalizaciones de la secuencia numérica al enfrentar situaciones progresivamente más complejas [12], el esquema de las fracciones obedece a los propósitos de [13]: la parte de un todo (de una pizza, Costas se come 3 rebanadas de 4 iguales), un cociente (el resultado de dividir 3 entre 4), un operador (después de lavar un suéter, éste se redujo a  $3/4$  de su tamaño original), una razón (por cada 3 niños hay 4 niñas en el salón de clases) o una medida (una cantidad representable como un punto sobre la línea recta, justo a la mitad entre  $1/2$  y 1).

Un estudio hecho por Moseley [11] prueba que la exposición del estudiante a situaciones donde diversas subconstrucciones de la fracción son requeridas favorece una concepción más completa y confiable de ella. De las cuatro subconstrucciones descritas, Pantziara y Philippou [13] remarcan la importancia de estudiar las fracciones en particular como una subconstrucción de medida porque esta es necesaria para desarrollar una pericia en las operaciones aritméticas, pero además porque la comprensión de esta subconstrucción es un buen indicador del desarrollo del concepto de fracción en general, al requerir de tres capacidades distintas: realizar particiones en un número de partes mayor que 2, encontrar cualquier número de fracciones entre dos fracciones dadas, y usar un intervalo unitario dado para medir cualquier distancia desde un origen. Al mismo tiempo, el reconocimiento de equivalencias es fundamental para entender las fracciones como entidades completas, las cuales, al representarse sobre la recta numérica, exigen la atención del estudiante en dos cocientes simultáneamente y en el reconocimiento de una densidad y un orden de números racionales. Por otro lado, tras un experimento con estudiantes de nivel básico, Cortina y Zúñiga concluyen que las “comparaciones tipo razón” pueden usarse productivamente en clases introductorias a las fracciones [3], apoyándose en actividades que permiten a los estudiantes descubrir por sí mismos equivalencias sencillas. Estas comparaciones resultan significativas para los estudiantes y les invitan a razonar en términos de multiplicandos que satisfacen un cierto criterio, contribuyendo a relacionar ambas cantidades de la fracción en ambos sentidos (A es un múltiplo de B si y sólo si B es un submúltiplo de A). Estos autores concuerdan con la visión de Freudenthal, para quien el enfoque educativo de parte-todo es bastante

limitado [6], y no sólo fenomenológicamente (como he mencionado, éste constituye apenas una de las cuatro subconstrucciones) sino matemáticamente, pues bajo este enfoque sólo pueden producirse fracciones propias de manera clara. La didáctica tradicional parece olvidar que la extensión de las fracciones no se agota con romper un todo en partes. El esquema de fracciones debe permitir al estudiante reformular oraciones como “en esta habitación hay la mitad de hombres que de mujeres” en otras matemáticamente más transparentes, como “el número de hombres en esta habitación es la mitad del número de mujeres”, estableciendo una relación entre las dos cantidades, con las que podremos representarnos, en este caso, una razón.

Con estos antecedentes, procederé a describir la importancia del juego en el aprendizaje, y a discutir brevemente la importancia social del videojuego.

### 3. EL JUEGO EN EL APRENDIZAJE

Un juego consiste en un conjunto de actividades que involucran a uno o más participantes en una lucha por alcanzar uno o varios objetivos en el marco de un conjunto de reglas definidas para tiempos y espacios finitos [10]. De manera implícita o explícita, los objetivos del juego pueden resultar de cualquier combinación de los siguientes cuatro [14]: desarrollar habilidades, impulsar el pensamiento creativo, derrotar a un oponente y divertir a los participantes. Las habilidades que se desarrollan durante el juego pueden ser de naturaleza intelectual, física o social, mientras que el oponente puede ser individual o colectivo, un ser humano o una inteligencia artificial, las leyes naturales o el azar. Pero por encima de sus objetivos, lo que define al juego es su capacidad de motivar de manera intrínseca a quien participa en él [9] y de llevarlo a un estado de flujo [15], entendiendo por motivación intrínseca la cualidad de atraer sin la necesidad de recompensar mediante ascensos de estatus de ninguna especie fuera de la propia actividad (es decir, motivaciones externas). La idea del estado de flujo proviene de la Teoría de flujo de la experiencia óptima desarrollada por Mihaly Csikszentmihalyi, que describe un estado de satisfacción en el que un sujeto se desenvuelve de manera espontánea y casi automática, y en el cual desea mantenerse aún a costa de algún sacrificio.

Es interesante notar cómo, desde la perspectiva del constructivismo psicogenético y sociocultural, el juego adquiere un papel fundamental en el desarrollo cognitivo de los individuos tan pronto como éstos han alcanzado la etapa preoperacional, en términos de la teoría piagetiana, y correspondientemente la noción metacognitiva de significado, en términos de la teoría vigotskiana [16]. La fantasía implícita del juego permite la asimilación de nuevos esquemas a las estructuras mentales con una

necesidad mínima de acomodación a las demandas de la realidad [9]. Esto se debe a que los símbolos y signos que emergen del proceso de desarrollo cognitivo pueden representar objetos y eventos incluso si nunca antes han sido experimentados por los sentidos, y se forman de manera única y personal con el objeto de entender y explicar el mundo a partir de las experiencias. El juego se convierte entonces en un espacio donde se ensayan las posibilidades alternativas de objetos y acciones, suspendiendo el sentido literal de las reglas y relaciones objetales y sociales, y aplicándolas a contextos extraños y hasta ese momento desconocidos, a partir de los cuales estas reglas y relaciones son entonces generalizadas.

Lo anterior indica que el juego es un entorno eficiente de aprendizaje, pero no sólo eso. Algunos estudios han probado que si un individuo es motivado de manera intrínseca a adquirir alguna habilidad, es más probable que dedique tiempo y esfuerzo en ejercitarla por cuenta propia, se sienta mejor por su progreso y recurra a esta habilidad con mayor frecuencia en el futuro [8].

#### 4. EL VIDEOJUEGO EN LA SOCIEDAD

El videojuego es un medio social de relevancia cultural innegable, definible como un juego en el que el jugador interactúa con los elementos del entorno a través de una interfaz electrónica, y cuya fantasía es presentada de manera audiovisual. Su relevancia obedece a una nueva generación de jóvenes que han crecido con las tecnologías digitales tan integradas a su vida diaria, que sus necesidades de información son saciadas preferencialmente por la multiseccionalidad del hipertexto y su pensamiento estratégico es desarrollado en buena medida durante su experiencia con todo tipo de software interactivo de computadora [1].

Ya Rieber [15] apuntó que un estudiante que se interese por alguno de los aspectos del videojuego, en particular su fantasía, se interesará consecuentemente en el contenido de éste. No es raro encontrar, en este sentido, videojugadores que conocen las biografías de personajes ficticios con más detalle que las de personajes reales de la historia universal, y que dominan con cierta maestría patrones y algoritmos de todo tipo en sus juegos, mucho más complicados que los que se repasan generalmente en clase. En su análisis teórico, Rieber abre la discusión sobre la forma en que aprendemos a través de los juegos, aceptando como cierto que aprendemos cuando nos divertimos, aunque no siempre esté bien definido (ni bien recibido) lo que se aprende.

Algunos efectos positivos reportados de la inclusión de videojuegos en los programas educativos son los siguientes [7; 20]: Los juegos son una manera alternativa de enseñar que involucra a los estudiantes de manera directa con los temas de estudio. Tienen una naturaleza

experimental, lo que permite a los estudiantes construir sus conceptos matemáticos a medida que interactúan con el entorno. Asimismo hacen que los estudiantes estén más interesados en aprender matemáticas, al disfrutar de una actividad dinámica y relacionar las matemáticas con sus intereses personales.

Pero, aunque recientemente ha surgido el interés por aprovechar las cualidades de los videojuegos en el ámbito de la educación [4], la literatura que existe al respecto es limitada. Algunos trabajos han intentado medir los niveles de interés que los videojuegos pueden generar en estudiantes preadolescentes de matemáticas [7] pero hacen falta más estudios que sustenten estos resultados de manera experimental.

Con esto he tocado los principales atributos negativos que los estudiantes ven en las matemáticas. La motivación intrínseca que define al juego, la relevancia actual de la videotecnología y el hecho de que la dificultad de los videojuegos es asumida por los jugadores como un reto estimulante [9], hacen del videojuego un medio válido para acercar las matemáticas a estudiantes que de otro modo no estarían interesados en ellas.

#### 5. METODOLOGÍA

Uno de los principales retos al diseñar un videojuego educativo es el de lograr un equilibrio entre el entretenimiento que el juego ofrece y su contenido educativo [18]. Como he mencionado, puede considerarse a la motivación intrínseca como la cualidad que define al juego. Dondlinger [5] señala que, aunque no todos los investigadores están de acuerdo con la fuente central de esta motivación, es importante que la fantasía del juego esté alineada con las actividades propuestas de aprendizaje, para que el contenido educativo se encuentre en el corazón de la experiencia lúdica y el jugador recurra a ese contenido de manera constante y voluntaria. Como complemento de esto, Dickey propone [4] que un ritmo lento de juego es más propicio para la observación y la reflexión, que es un elemento indispensable para que el contenido educativo tenga un impacto sobre el jugador.

Con estas consideraciones, tomé como base el popular juego japonés Sokoban, cuyo objetivo es empujar cajas, una a la vez, hasta lugares designados dentro de un laberinto reducido en el menor número posible de pasos, y agregué la mecánica de acomodar los objetos en orden de menor a mayor. En *Aritban*, el jugador debe empujar rocas etiquetadas con fracciones hasta su solución. Cada nivel está diseñado para que el jugador descubra un modelo específico de comparación de fracciones, considerando para estos modelos el análisis que Brown y Quinn [2] hacen sobre algunos errores algebraicos comunes que tienen su origen en un mal dominio de las fracciones:

La fracción es mayor si el denominador es el mismo y el numerador es mayor.

La fracción es mayor si el denominador es menor y el numerador es el mismo.

Cualquier fracción impropia es mayor que cualquier fracción propia.

Al compararse con una cantidad mayor que ambas fracciones, es mayor la fracción más cercana a esa cantidad.

Al compararse con una cantidad menor que ambas fracciones, es menor la fracción más cercana a esa cantidad.

Entre cualesquiera dos fracciones puede proponerse una fracción intermedia que ayude a distinguir las con claridad.

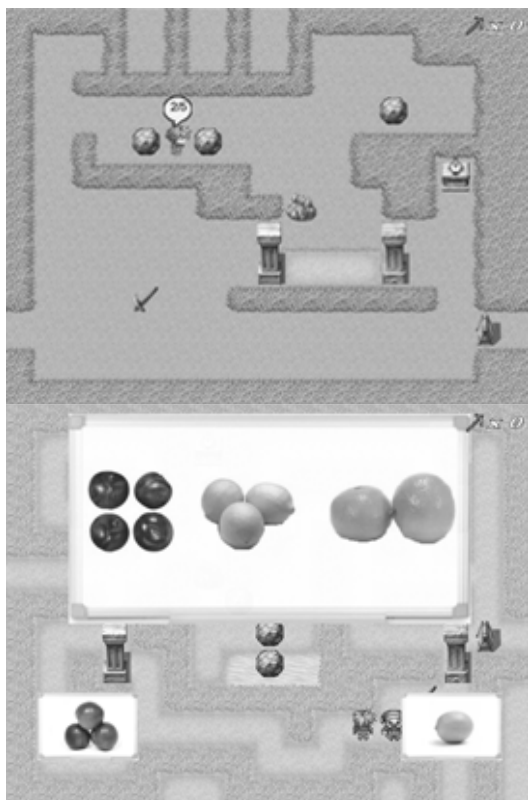


Figura 1. Arriba: El jugador debe ordenar rocas etiquetadas con fracciones. Abajo: El jugador debe comparar dos magnitudes.

Originalmente en esto consistía la totalidad de *Aritban*, pero en pruebas de la fase de desarrollo algunos jugadores mencionaron que la complejidad de algunos laberintos podría ser muy alta para estudiantes poco familiarizados con la mecánica de Sokoban. Para remediar esta situación, adapté una actividad propuesta por Cortina y Zúñiga [3], incluyendo un personaje que muestra por pares conjuntos de cosas entre las que el jugador debe decidir cuál representa una cantidad mayor, conociendo la relación que hay entre un conjunto de objetos y otro. Por ejemplo, sabiendo que tres limones pesan lo mismo que cuatro ciruelas, el jugador debe

decidir si pesan más tres ciruelas que un limón. Al elegir correctamente entre tres pares de manera consecutiva, el jugador tiene la oportunidad de eliminar un bloque de las paredes del laberinto, volviéndolo significativamente más sencillo de resolver.

Debo señalar que en ningún momento durante la interacción con *Aritban* existe algún tipo de actividad didáctica de manera explícita, como lecciones sobre fracciones o una recapitulación de lo que deba aprenderse. El jugador únicamente avanza de un nivel a otro al completar cada laberinto.

### Examen Diagnóstico

Como parte de un breve proyecto no publicado (Estrada Santos, H., Martínez Uribe, A., Olvera Ventura, A., y Villamizar Araque, F. Y., diciembre de 2011) se preparó un examen que permitiera diagnosticar problemas con las estrategias de comparación de fracciones, el cual consta de cinco ítems adaptados de un cuestionario preparado por Pantziara y Philippou [13]. La validación del videojuego *Aritban* consistió en la aplicación de este examen diagnóstico a un grupo pequeño de estudiantes de 7° grado de educación básica (1° de secundaria en México) antes y después de cuatro sesiones de juego de 50 minutos cada una realizadas a lo largo de dos semanas. No se dio asesoría de ningún tipo a los estudiantes durante el transcurso del estudio.

La Figura 2 muestra el examen diagnóstico que se aplicó de manera posterior a las sesiones con *Aritban*. Un examen muy similar fue aplicado antes de las sesiones, con valores distintos para las fracciones. Me referiré a los cinco estudiantes como Abel, Bilha, Caín, Dan y Eva.

## 6. DISCUSIÓN

Abel no tiene dificultades en los primeros cuatro ítems de las pruebas, y ya desde el pretest los contesta correctamente. En el ítem E muestra sin embargo un cambio de comportamiento muy interesante. En el pretest se auxilia de una línea recta que divide en cierto número de partes. Probablemente intentó dividir en octavos y novenos, pero el procedimiento que utilizó para dividir la recta no le permitió observar la diferencia entre cada partición y, de hecho, sus trazos sugieren que ha identificado a  $1/8$  a la izquierda de  $1/9$  en la recta. Abel parece percatarse de esta dificultad, pues en el postest, luego de intentar el mismo procedimiento sin éxito, propone un denominador común para comparar las fracciones, y cuando el mínimo común múltiplo es insuficiente, extiende aún más su concepto de equivalencia multiplicando numerador y denominador por una constante y encontrando, finalmente, que  $13/84$  es un número mayor que  $1/7$  y menor que  $1/6$ , fracciones que, a diferencia de  $1/9$  y  $1/8$  en el pretest, ha ordenado correctamente sobre la recta.

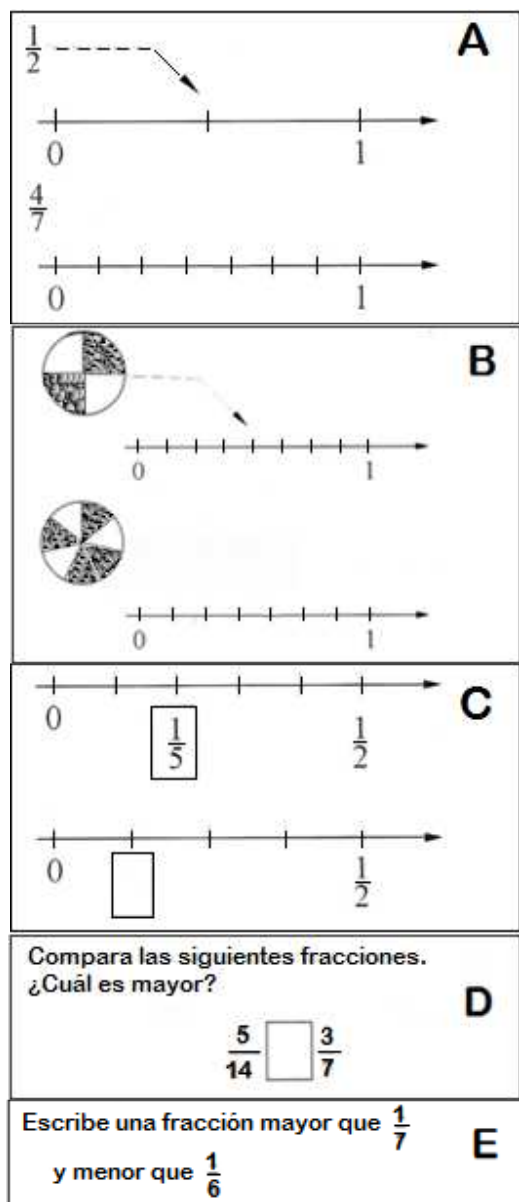


Figura 2. Examen diagnóstico.

Bilha cambia su estrategia de escribir las fracciones en su forma decimal en el ítem D del pretest (algo que hace de manera incorrecta, al dividir denominador entre numerador). En el postest compara las fracciones usando un criterio de equivalencia, aunque éste es deficiente. De acuerdo a este criterio,  $\frac{5}{7}$  puede compararse directamente con  $\frac{3}{14}$  porque “el denominador es equivalente”, y 5 es mayor que 3. Aunque ha intentado recurrir a una equivalencia de fracciones, el concepto no se ha desarrollado correctamente pues supone que dos fracciones son equivalentes si uno de los denominadores es múltiplo del otro, independientemente de los numeradores.

El único cambio perceptible en Caín se da en la respuesta del ítem C. En el pretest sólo presta atención al número

de segmentos y escribe  $\frac{1}{3}$  debajo de la marca que señala la tercera parte de  $\frac{1}{2}$ . En el postest distingue correctamente entre  $\frac{1}{2}$  y la unidad, y escribe  $\frac{1}{8}$  bajo la marca correspondiente a la cuarta parte de  $\frac{1}{2}$ .

Con respecto a Dan, es destacable el intento de una solución por medio de la expansión decimal de las fracciones en el ítem E del postest, aunque la aplicación de un algoritmo incorrecto de la división le impide llegar a una respuesta correcta. En lo que se refiere a la ubicación de puntos sobre la recta numérica, presenta muchos problemas que no han sido superados, en particular el conteo de una parte adicional a la correspondiente y la ubicación del cero y la unidad.

Eva no parece modificar sus estrategias pero sí se observa un pequeño cambio. En el ítem E del pretest no busca una fracción que sea simultáneamente mayor que  $\frac{1}{9}$  y menor que  $\frac{1}{8}$ , sino una fracción para cada condición. No consigue proponer una fracción que sea menor que  $\frac{1}{8}$ , sin embargo, y sólo atina a afirmar que  $\frac{2}{9}$  debe ser mayor que  $\frac{1}{9}$ . En el postest ya logra responder a ambas condiciones, aunque por separado. Explica que  $\frac{2}{7}$  es mayor que  $\frac{1}{7}$  porque el numerador es el doble, y asimismo  $\frac{1}{12}$  es menor que  $\frac{1}{6}$  porque el denominador es el doble.

## 7. CONCLUSIONES

Los estudiantes se mostraron entusiasmados e interesados en continuar jugando una vez que las sesiones concluyeron. Al término del postest todos mencionaron que sentían haber aprendido matemáticas y que les gustaría seguir aprendiendo de esa manera, a pesar de que intencionalmente se evitó hacer cualquier referencia al aprendizaje o a las fracciones en la presentación del juego. Y aunque en realidad no se obtuvo gran evidencia de que gracias a *Aritban* se consolidara algún concepto matemático o se desarrollaran por completo las subconstrucciones de medida y razón de las fracciones, la evidencia apunta a que, al no poder avanzar de un nivel a otro utilizando un razonamiento que consideraban suficiente, y posteriormente un método de prueba y error, la interacción con el videojuego incitó a los estudiantes a reflexionar sobre las fracciones como entidades que dependen del numerador y el denominador con la misma importancia (aunque la relación entre ellos no quede completamente clara) y a replantear sus estrategias de comparación de fracciones, atreviéndose incluso a probar algunas de esas nuevas estrategias en el postest.

Por otro lado, todos mostraron una mejora gradual en su desempeño con el juego, lo que es realmente notable, pues no existió intervención didáctica en ningún momento. El cambio se debió al desarrollo de una habilidad para ordenar fracciones, una habilidad para resolver laberintos, al estudio voluntario de fracciones con el objeto de mejorar en el juego, o a alguna

combinación de estas proposiciones, que en ningún caso resulta poco deseable.

Es mi opinión, con base en los resultados obtenidos después de sólo 200 minutos de juego, que una interacción prolongada con este tipo de software puede reportar resultados satisfactorios, si bien sólo para motivar al jugador a la reconsideración de lo que conoce o cree conocer. De la bibliografía revisada hasta el momento no parece existir un estudio previo que utilice un videojuego educativo de estas características para trabajar con algún aspecto relacionado con las fracciones, si bien el uso de applets educativos en internet ya está bastante difundido, en especial los Java applets y las animaciones Flash. Será necesario entonces un estudio que dé mayor seguimiento a estos u otros participantes.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. Andone, J. Dron, L. Pemberton y C. Boyne, "E-learning environments for digitally-minded students", *Journal of Interactive Learning Research*, 18 (1), 2007, 41-53.
- [2] G. Brown y R. Quinn, "Algebra students' difficulty with fractions: an error analysis", *The Australian Mathematics Teacher*, 62 (4), 2006, 28-40.
- [3] J. Cortina y C. Zúñiga, "Ratio-like comparisons as an alternative to equalpartitioning in supporting initial learning of fractions", *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, Vol. 2; México: Cinvestav-UMSNH, 2008, 385-392.
- [4] M. D. Dickey, "Game design narrative for learning: appropriating adventure game design narrative devices and techniques for the design of interactive learning environments", *Educational Technology Research and Development*, 54 (3), 2006, 245-263.
- [5] M. J. Dondlinger, "Educational video game design: a review of the literature", *Journal of Applied Educational Technology*, 4 (1), 2007, 21-31.
- [6] H. Freudenthal, "Didactical phenomenology of mathematical structures", Nueva York: Kluwer Academic, 1983, 133-177.
- [7] M. Kebritchi, A. Hirumi y H. Bai, "The effects of modern mathematics computer games on mathematics achievement and class motivation", *Computers and Education*, 55, 2010, 427-443.
- [8] M. R. Lepper y D. Greene, "Undermining children's intrinsic interest with extrinsic reward: a test of the 'overjustification' hypothesis", *Journal of Personality and Social Psychology*, 28 (1), 1973, 129-137.
- [9] T. W. Malone, "Toward a theory of intrinsically motivating instruction", *Cognitive Science*, 4, 1981, 333-369.
- [10] A. Mitchell y C. Savill-Smith, "The use of computer and video games for learning: a review of the literature", Reino Unido: Learning and Skills Development Agency, 2004.
- [11] B. Moseley, "Students' early mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving", *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 2005, 37-69.
- [12] J. Olive, "Children's number sequences: an explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic", *The Mathematics Educator*, 11 (1), 2001, 4-9.
- [13] M. Pantziara y G. Philippou, "Levels of students' 'conception' of fractions", *Educational Studies in Mathematics*, 70 (1), 2011, 61-83.
- [14] A. D. Pellegrini, "The future of play theory: a multidisciplinary inquiry into the contributions of Brian Sutton-Smith", Nueva York: State University of New York Press, 1995.
- [15] L. P. Rieber, "Seriously considering play: designing interactive learning environments based on the blending of microworlds, simulations, and games", *Educational Technology Research & Development*, 44 (2), 1996, 43-58.
- [16] C. Sebastián y R. Rosas, "Piaget, Vigotski y Maturana: constructivismo a tres voces", Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2001.
- [17] L. P. Steffe, "A new hypothesis concerning children's fractional knowledge", *Children's fractional knowledge*; Nueva York: Springer, 2010, 1-12.
- [18] J. Torrente, A. del Blanco, E. J. Marchiori, P. Moreno-Ger y B. Fernández-Manjón, "Introducing educational games in the learning process", *Proceedings of the IEEE Educon 2010 Conference*; Madrid: IEEE Educon, 2010, 1119-1124.
- [19] J. Yusof y J. Malone, "Mathematical errors in fractions: a case of Bruneian primary 5 pupils", *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity*; Geelong, Australia: MERGA, 2003, 783-790.
- [20] G. Zhou, W. Brouwer, N. Nocente y B. Martin, "Enhancing conceptual learning through computer-based applets: the effectiveness and implications", *Journal of Interactive Learning Research*, 16 (1), 2005, 31-49.