Diseño de un Controlador Óptimo Discreto para un Péndulo Invertido

Facultad de Ciencias de la Electrónica
Puebla, Pue., 72570, México
Serapio Hernández Santos
hess_141184@ece.buap.mx

Facultad de Ciencias de la Electrónica
Puebla, Pue., 72570, México
José E. M. Gutiérrez Arias
jmgutierrez@ece.buap.mx

Facultad de Ciencias de la Electrónica
Puebla, Pue., 72570, México
José E. Flores Mena
eflores@ece.buap.mx

Facultad de Ciencias de la Electrónica
Puebla, Pue., 72570, México
María M. Morin Castillo
mmorin@ece.buap.mx

RESUMEN

Se presenta la síntesis de un controlador óptimo discreto para un péndulo invertido sobre una base móvil de dos ruedas, el controlador óptimo está fundamentado en el principio discreto del mínimo introducido por Pontryagin. Escribimos su modelo matemático utilizando el método de Euler-lagrange para posteriormente linealizarlo alrededor de un punto de equilibrio, y finalmente obtener la ley de control. Las simulaciones se obtienen con la ayuda de Matlab y Mathematica.

Palabras clave: Péndulo invertido,modelo matemático, control óptimo digital, principio del mínimo, ecuación algebraica de Ricatti.

1. Introducción

Los péndulos invertidos son una familia de artefactos que constituyen un banco de pruebas muy completo para la ingeniería de control no lineal. El más estudiado de los miembros de esta familia es el denominado control invertido sobre un vehículo, al que corrientemente se denomina como carro. Consiste en un péndulo o varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un vehículo o sistema móvil, que se mueve horizontalmente bajo la acción de una fuerza F. Esta fuerza es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición de la varilla.

El modelo del péndulo invertido es un ejemplo clásico en la literatura de control y tiene múltiples aplicaciones, desde el control de misiles hasta el análisis de la biomecánica de la marcha, balance y postura humana. El péndulo invertido es un sistema inestable, ya que puede caer en cualquier momento, a menos de que se aplique una fuerza de control adecuada [1].

El interés del problema local del péndulo invertido reside en que se trata de estabilizar una posición inestable en lazo abierto. En sistemas lineales, la estabilidad en lazo cerrado de un punto inestable en lazo abierto, no ofrece particulares problemas, éstos aparecen cuando el sistema es no lineal.

Los modelos matemáticos no lineales exhiben con riqueza el comportamiento real de muchos fenómenos; sin embargo, no siempre es sencillo encontrar las soluciones de las ecuaciones con las que se modela y en muchos casos hay que arrancar con aproximaciones linelas y a partir de ahí formar ciertas generalizaciones [2].

Un sistema de control óptimo, es un sistema cuyo diseño *optimiza* (minimiza o maximiza, según sea el caso) el valor de una función seleccionada como el índice de desempeño. Para esto se requiere una descripción matemática del problema, las restricciones impuestas sobre él y la función objetivo a ser maximizada o minimizada. Pueden ser sistemas que evolucionan en el tiempo, como el cuerpo humano o un sistema económico. Una vez que el problema ha sido resuelto, el control óptimo nos da una senda de comportamiento para las variables de control; es decir, nos indica qué acciones se deben seguir para poder llevar los estados del sistema de un estado inicial a uno final de forma óptima [3].

El principio del péndulo fue descubierto por el físico y astrónomo italiano Galileo, quien estableció que el periodo de la oscilación de un péndulo de una longitud dada puede considerarse independiente de su amplitud (la amplitud es la distancia máxima que se puede alejar el péndulo de la posición de equilibrio − vertical). Este descubrimiento lo hizo observando las oscilaciones de una lámpara colgante en la Catedral de Pisa.

En 1851 el científico francés León Foucault realizó un experimento en el Panteón de París que puso de manifiesto la rotación terrestre, ésto usando el principio del péndulo normal.

Posteriormente Katuhico Furuta construyo su péndulo conocido como en *Péndulo de Furuta* . Consiste en un motor de eje vertical al que es solidario un brazo de cuyo extremo cuelga la varilla del péndulo. Es decir, el extremo del brazo juega el mismo papel que el de un carro en otros péndulos [3].

Existen trabajos recientes sobre el péndulo invertido, mencionamos algunos, como por ejemplo, el desarrollado por J. Aracil y F. Gordillo en donde revisan algunos controladores empleados convencionalmente y además proponen una solución al problema del swing up con estabilización, para lo cual se emplearon diferentes métodos control, como el moldeo de energía y el forwarding [1].

En el trabajo presentado por Andrea Bonarini, Alessandro Lazaric y Marcelo Restelli se aplica una técnica llamada aprendizaje por refuerzo (Reinforcement Learning) y usan controlador de tipo LQR (linear cuadratic rugulator) en tiempo continuo, obtenido de la teoría del control óptimo [4].

El trabajo más reciente es el hecho por el Ing. Héctor Sánchez, Ph.D. Iñaki Aguirre y Ph.D. Anna Patete, en donde se construye un péndulo sobre dos ruedas, se elabora su modelo matemático utilizando el método de Lagrange. Aquí, la dinámica del sistema se piensa como constituida por dos bloques en cascada, por un lado la velocidad y aceleración del péndulo que representan la dinámica de la planta y por otro la velocidad y aceleración de las ruedas que representan la dinámica de control. De aquí desacoplan el sistema para obtener ahora un sistema de segundo orden en vez de uno de cuarto orden, para posteriormente discretizar y aplicar un controlador de tipo PID[5].

En este trabajo sintetizamos una ley de control óptima discreta para el péndulo invertido fundamentado en la aplicación del principio del mínimo. Mediante el comando de MATLAB *dlrq*, para el tiempo infinito obtenemos una segunda ley de control con la finalidad de comparar nuestro control con un control clásico.

2. Modelado del sistema físico

Para efectos de análisis, consideraremos que el sistema base-péndulo es de estructura rígida, es decir, lo veremos como un conjunto de partículas obligadas a permanecer a distancias relativas, absolutamente fijas, hecho válido para situaciones prácticas. Procederemos ahora a encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema.

La figura 1 muestra un diagrama esquemático del sistema del péndulo invertido. A continuación se muestran los parámetros del sistema con los valores que serán tomados en cuenta para el control.

- m_0=masa del carro (0.5 kg)
- m_1=masa del péndulo (0.5 kg)
- L=longitud del péndulo (0.4 m)
- I=inercia del péndulo (0.03 kgm^2)
- F=fuerza aplicada al carro
- x=posición del carro
- θ=posición angular del péndulo.

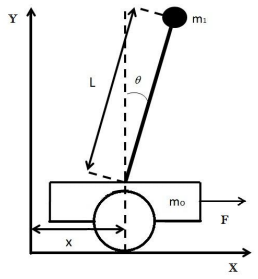

Figura 1: Péndulo invertido.

La fórmula general de Lagrange es para obtener las ecuaciones del movimiento del sistema

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = Q_i, \tag{1}$$

donde $L = k_i - p_i$ es un Lagrangiano, Q_i es un vector de fuerzas generalizadas (o momentos).

La energía cinética y potencial del sistema están expresadas de forma general para cada uno de los componentes (carro y péndulo)

$$k_T = k_0 + k_1$$
$$p_T = p_0 + p_1.$$

Por lo tanto el Lagrangiano del sistema está dado por:

$$L = k_T - p_T = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + m_1\dot{x}L\dot{\theta}cos\theta + \frac{1}{2}m_1L^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - m_1gLcos\theta. \tag{2}$$

Luego aplicamos la ecuación (1) para deducir las ecuaciones de movimiento del sistema y tenemos

$$\begin{aligned}(m_0 + m_1)\ddot{x} + m_1\ddot{\theta}Lcos\theta - m_1L\dot{\theta}^2sen\theta = u \\ (m_1L^2 + I)\ddot{\theta} + m_1L\ddot{x}cos\theta - m_1gLsen\theta = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

3. Linealización del sistema

La linealización del péndulo invertido se realizará por medio de la vecindad del punto de equilibrio. Primero obtenemos $\ddot{x}$ y $\ddot{\theta}$

$$\ddot{x} = \frac{m_1L^2 + I}{(m_1L^2 + I)(m_0 + m_1) - m_1^2L^2cos^2\theta} + \frac{(m_1L^2 + I)(m_1L\dot{\theta}^2sen\theta)}{(m_1L^2 + I)(m_0 + m_1) - m_1^2L^2cos^2\theta} - \frac{(m_1L)^2gsen\theta cos\theta}{(m_1L^2 + I)(m_0 + m_1) - m_1^2L^2cos^2\theta}, \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(m_0 + m_1)m_1gLsen\theta}{(m_0 + m_1)(m_1L^2 + I) - m_1^2L^2cos^2\theta} - \frac{m_1Lcos\theta}{(m_0 + m_1)(m_1L^2 + I) - (m_1^2L^2cos^2\theta)}u - \frac{(m_1L)^2\dot{\theta}^2cos\theta sen\theta}{(m_0 + m_1)(m_1L^2 + I) - (m_1^2L^2cos^2\theta)}. \quad (5)$$

Definimos las variables de estado como $x_1 = x$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \dot{x}$ y $x_4 = \dot{\theta}$.

Considérese el sistema $\dot{x} = f(x, u), x \in R^4, u \in R^1$; donde el origen del sistema es un punto de equilibrio, esto es: $f(0, 0) = 0$, (que físicamente corresponde a la posición del carro con desplazamiento lineal cero y la posición del péndulo con desplazamiento angular cero), y el sistema es diferenciable al menos una vez en una región la cual contiene al punto de equilibrio, es decir $D_x \times D_u \subset R^4 \times R^1$. Como resultado de la linealización se obtendrá un sistema de la forma:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t). \quad (6)$$

Calculando las derivadas y sustituyendo los parámetros del tenemos los valores para A y para B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7{,}7447 & 0 & 0 \\ 0 & 51{,}6316 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}7895 \\ -5{,}2632 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Con lo que tenemos el sistema lineal de estado.

3.1. Discretización del sistema.

Para un periodo de muestreo T, tenemos $t_k = kT$ el modelo discreto de la ecuación de estados en tiempo continuo es

$$\begin{aligned} \dot{x}(kT + T) &= \phi x(kT) + \Gamma u(kT) \quad (8) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT). \end{aligned}$$

Obtenemos ϕ y Γ usando el comando $c2d$ de Matlab con un periodo de muestreo T=0.1 y tenemos:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1{,}0000 & -0{,}0404 & 0{,}1000 - 0{,}0013 \\ 0 & 1{,}2695 & 00{,}1088 \\ 0 & -0{,}8429 & 1{,}0000 - 0{,}0404 \\ 0 & 5{,}6191 & 01{,}2695 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0{,}0091 \\ -0{,}0275 \\ 0{,}1859 \\ -0{,}5728 \end{pmatrix} \quad (10)$$

4. Principio Discreto del Mínimo.

El principio del mínimo introducido por Pontryagin es un método muy potente para la solución de una clase amplia de sistemas de datos continuos. En términos estrictos, la aplicación del principio discreto del máximo requiere la investigación de la condición de convexidad del sistema. El problema de diseño puede plantearse de la siguiente manera: encontrar el control óptimo u°(k) sobre [0,N] tal que el índice de desempeño

$$J = G\left[x(N), N\right] + \sum_{k=0}^{N-1} F\left[x(k), u(k), k\right], \quad (11)$$

sea mínimo, sujeto a la restricción de igualdad,

$$x(k + 1) = f\left[x(k), u(k), k\right]. \quad (12)$$

El término $G\left[x(N), (N)\right]$ que aparece en la ecuación (12) es el costo final de índice de desempeño, y se requiere como restricción final sobre la condición en el extremo sólo si $x(N)$ no es fijo.

4.1. Diseño de un regulador digital óptimo.

Una de las técnicas de diseño que en general ha encontrado aplicaciones prácticas, es el diseño del regulador lineal. El problema del regulador se define con respecto a un sistema sin entradas de referencia, y donde el objetivo de diseño es llevar los estados o las salidas hacía la vecindad del estado de equilibrio. La condición de no entradas no constituye una limitación severa para el diseño, ya que el diseño del regulador lineal(tiempo infinito) asegura que el sistema resultante sea estable y con ciertas características de amortiguamiento, de modo que el desempeño del sistema sea satisfactorio en la práctica, incluso si las entradas son distintas de cero. A continuación se formula primero el índice de desempeño con referencia a un proceso de datos continuos con datos muestreados y después con respecto a un proceso completamente digital. El problema del regulador digital lineal puede plantearse de la siguiente manera. Dado el sistema lineal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (13)$$

donde $x(t)$ es el vector de dimensión $n \times 1$ de estados y $u(t)$ es el vector de dimensión $p \times 1$ de control dado por:

$$u(t) = u(kT) \qquad kT \leq t < (k + 1)T. \quad (14)$$

Encontrar el control óptimo $u^o(kT)$ para $k = 0, 1, 2, ..., N - 1$, tal que minimice el índice de desempeño cuadrático

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\left\langle x(t_f), Sx(t_f)\right\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\left\langle x(t), Qx(t)\right\rangle + \left\langle u(t), Ru(t)\right\rangle\right]. \quad (15) \end{aligned}$$

En la ecuación anterior $t_f = NT$, S y Q matrices simétricas (de dimensión $n \times n$) definidas positivas y R una matriz simétrica (de dimensión $p \times p$) definida positiva.

El primer paso es discretizar el sistema de la ecuación (14); esto se hace con la ecuación en diferencias

$$x[(k+1)T] = \phi(T)x(kT) + \theta(T)u(kT), \tag{16}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(T) &= e^{AT} \\ \theta(T) &= \int_0^T \phi(T-\tau)Bd\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

Para discretizar el índice de desempeño de la expresión (16), ésta se escribe

$$J_N = \frac{1}{2}\langle x(NT), Sx(NT)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kT}^{(k+1)T}[\langle x(t), Qx(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle]dt. \tag{18}$$

A continuación se escribe la ecuación de transición de estados de la expresión (14) para $t \geq kT$

$$x(t) = \phi(t-kT)x(kT) + \theta(t-kT)u(kT), \tag{19}$$

en consecuencia

$$x'(t) = x'(kT)\phi'(t-kT) + u'(kT)\theta'(t-kT). \tag{20}$$

Se sustituyen las ecuaciones (15), (20) y (21) en la (19) y se tiene:

$$J_N = \frac{1}{2}x'(NT)Sx(NT) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x'(kT)\hat{Q}(T)x(kT) + 2x'(kT)M(T)u(kT) + u'(kT)\hat{R}(T)u(kT)] \tag{21}$$

donde

$$\hat{Q}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T}\phi'(t-kT)Q\phi(t-kT)dt \tag{22}$$

$$M(T) = \int_{kT}^{(k+1)T}\phi'(t-kT)Q\theta(t-kT)dt \tag{23}$$

$$\hat{R}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T}\theta'(t-kT)Q\theta(t-kT).dt \tag{24}$$

Por las propiedades de Q y R, se observa que $\hat{Q}(T)$ es simétrica y semidefinida positiva, mientras que $\hat{R}(T)$ es simétrica y definida positiva. Sin embargo, no es posible afirmar nada con respecto a $M(T)$. Ahora, el problema es que, dado el sistema digital de la ecuación (17), es necesario encontrar el control óptimo, de modo que se minimice el índice de desempeño de la ecuación (22).

Se puede hacer una simplificación de la expresión (22) por lo tanto solo se necesitan las matrices $\hat{Q}$, y $\hat{R}$. Se elabora un programa en Matlab para obtener dichas matrices, obteniendo los siguientes valores

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1{,}1263 & 0{,}3125 & 0{,}0013 & 0{,}0405 \\ 0{,}3125 & 0{,}1195 & 0{,}0000 & 0{,}0013 \\ 0{,}0013 & 0{,}0000 & 0{,}1000 & 0{,}0050 \\ 0{,}0405 & 0{,}0013 & 0{,}0050 & 0{,}1003 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\hat{R} = 0{,}0113. \tag{26}$$

Estos valores se usarán posteriormente para el diseño del control.

4.2. Diseño de un regulador digital lineal (problema del tiempo finito).

El problema de diseño del regulador digital lineal planteado en la sección anterior puede resolverse con el principio discreto del mínimo. El proceso de control digital está descrito por

$$x(k+1) = \phi x(k) + \theta u(k), \tag{27}$$

con $x(0)$ dado. El objetivo de diseño es encontrar $u^{\circ}(k)$ tal que minimice el índice de desempeño

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{1}{2}\langle x(N), Sx(N)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{\left\langle x(k), \hat{Q}x(k)\right\rangle \\ &+ \langle x(k), 2Mu(k)\rangle + \left\langle u(k), \hat{R}u(k)\right\rangle\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Para ello se forma el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H(k) &= H[x(k), p(k+1), u(k)] \\ &= \frac{1}{2}\left\langle x(k), \hat{Q}x(k)\right\rangle + \langle x(k), Mu(k)\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\left\langle u(k), \hat{R}u(k)\right\rangle \\ &+ \langle p(k+1), \phi x(k) + \theta u(k)\rangle. \end{aligned} \tag{29}$$

Las condiciones suficientes para que J_N sea un extremo son

$$\frac{\partial H^{\circ}(k)}{\partial x^{\circ}(k)} = p^{\circ}(k) + \hat{Q}x^{\circ}(k) + \phi' p^{\circ}(k+1) + Mu^{\circ}(k) \tag{30}$$

$$\frac{\partial H^{\circ}(k)}{\partial p^{\circ}(k+1)} = x^{\circ}(k+1) = \phi' x^{\circ}(k) + \theta u^{\circ}(k) \tag{31}$$

$$\frac{\partial H^{\circ}(k)}{\partial u^{\circ}(k)} = M' x^{\circ}(k) + \hat{R}u^{\circ}(k) + \theta' p^{\circ}(k+1) = 0. \tag{32}$$

En este caso, puesto que no se especifica $x^{\circ}(N)$, la condición de transversalidad es

$$\begin{aligned} \frac{\partial G[x(N), N]}{\partial x(N)} &= \frac{\partial}{\partial x(N)}\left[\frac{1}{2}\langle x(N), Sx(N)\rangle\right] \\ &= Sx(N) = p(N). \end{aligned} \tag{33}$$

El control óptimo se obtiene de la ecuación (33)

$$u^{\circ}(k) = -\hat{R}^{-1}[\theta' p^{\circ}(k+1) + M' x^{\circ}(k)]. \tag{34}$$

Claramente el control depende del comportamiento de la variables de coestado.

Despues de sustituir la expresión anterior en las ecuaciones (31) y (32), las ecuaciones canónicas de estado son

$$x^{\circ}(k+1) = (\phi - \theta\hat{R}^{-1}M')x^{\circ}(k) - \theta\hat{R}^{-1}\theta' p^{\circ}(k+1) \tag{35}$$

$$(\phi' - M\hat{R}^{-1}\theta')p^{\circ}(k+1) = p^{\circ}(k) - (\hat{Q} - M\hat{R}^{-1}M')x^{\circ}(k). \tag{36}$$

Estas expresiones representan $2n$ ecuaciones de diferencias que es necesario resolver con las condiciones de frontera $x(0)$ y $p^{o}(N) = Sx^{o}(N)$. Nótese que las ecuaciones (36) y (37) estan acopladas en $x^{o}(k)$ y $p^{o}(k)$.

Se elaboró un programa en *mathematica* para resolver las ecuaciones (36) y (37) obteniendo la gráfica para cada una de las variables de estado.

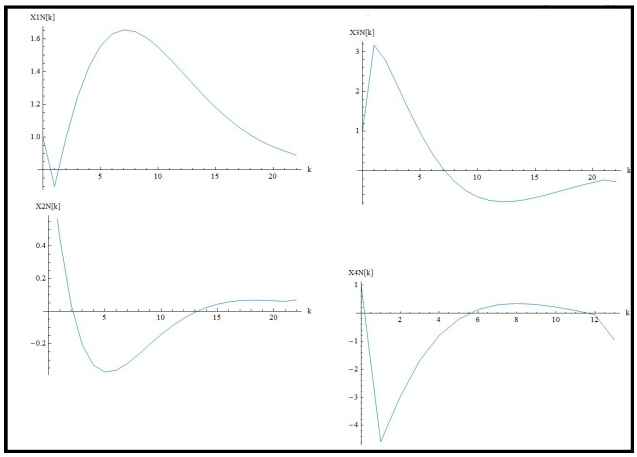

Figura 2: Variables de estado

En la figura anterior se muestran los resultados para las variables de estado que como se mencionó anteriormente la convergencia al punto de equilibrio de las mismas depende estrictamente del comportamiento de las variables de coestado $p(k)$.

5. Ecuación de Ricatti

Proponemos que la solución de los coestados es de la forma

$$p(k) = K(k)x(k), \tag{37}$$

donde $K(k)$ es una matriz de dimensión $n \times n$, con propiedades aún desconocidas, excepto que en $k = N$. De la ecuación (34)

$$K(N) = S. \tag{38}$$

Se sustituye la ecuación (38) en la (36), se reacomodan términos y se tiene

$$x^{o}(k+1) = [I + \theta\hat{R}^{-1}\theta' K(k+1)]^{-1}(\phi - \theta\hat{R}^{-1}M')x^{o}(k), \tag{39}$$

donde se supone que existe la inversa de $[I + \theta\hat{R}^{-1}\theta' K(k+1)]$. De manera similar, después de sustituir la ecuación (38) en la (37), se tiene que

$$(\phi' - M\hat{R}^{-1}\theta')K(k+1)x^{o}(k+1) = [K(k) - \hat{Q} + M\hat{R}^{-1}M']x^{o}(k). \tag{40}$$

Si ahora se sustituye la expresión (40) en (41), entonces

$$(\phi' - M\hat{R}^{-1}\theta')K(k+1))[I + \theta\hat{R}^{-1}\theta' K(k+1)]^{-1}$$
$$(\phi - \theta\hat{R}^{-1}M')x^{o}(k) = [K(k) - \hat{Q} + M\hat{R}^{-1}M']x^{o}(k). \tag{41}$$

Por otra parte, para cualquier $x^{o}(k)$ debe satisfacerse la siguiente ecuación:

$$(\phi' - M\hat{R}^{-1}\theta')K(k+1))[I + \theta\hat{R}^{-1}\theta' K(k+1)]^{-1}$$
$$(\phi - \theta\hat{R}^{-1}M') = [K(k) - \hat{Q} + M\hat{R}^{-1}M']. \tag{42}$$

La expresión anterior es una ecuación matricial de diferencias no lineal en $K(k)$, de tipo Riccati y que en general se conoce como *ecuación discreta de Riccati*. La matriz $K(k), n \times n$, se denomina *ganancia de Riccati*. La condición de frontera para la ecuación de Riccati está dada por la expresión (39). En general, la ecuación 43 contiene n^2 ecuaciones escalares, con el mismo número de incógnitas en los elementos de $K(k)$; sin embargo, se puede demostrar que $K(k)$ es simétrica, de modo que sólo existen $n(n+1)/2$ incógnitas. El control óptimo se obtiene sustituyendo la ecuación (38) en la (35). En consecuencia

$$u^{o}(k) = -[I+\hat{R}^{-1}\theta' K(k+1)\theta]^{-1}\hat{R}^{-1}[\theta' K(k+1)\phi+M']x^{o}(k)$$
$$= -[\hat{R} + \theta' K(k+1)\theta]^{-1}[\theta' K(k+1)\phi + M']x^{o}(k). \tag{43}$$

La cual tiene la forma de una retroalimentación de estados. Cuando $M = 0, \hat{Q} = Q$ y $\hat{R} = R$, la ecuación de Riccati se convierte en

$$\phi' K(k+1)[I + \theta R^{-1}\theta' K(k+1)]^{-1}\phi + Q = K(k). \tag{44}$$

El control óptimo correspondiente está dado por

$$u^{o}(k) = -[R + \theta' K(k+1)\theta]^{-1}\theta' K(k+1)\phi x^{o}(k). \tag{45}$$

En general, para un objetivo dado, existe una forma particular de la ecucación de Riccati que resulta ser la mas adecuada. Esta es:

$$K(k) = \phi' K(k+1)\phi + \hat{Q} - [\theta' K(k+1)\phi + M']'$$
$$[\hat{R} + \theta' K(k+1)\theta]^{-1}[\theta' K(k+1)\phi + M'], \tag{46}$$

que es equivalente a la ecuación (43).

5.1. Diseño de un regulador digital lineal (problema del tiempo infinito)

Para tiempo infinito o para un número infinito de etapas, $N = \infty$, el índice de desempeño dado por la ecuación (29) puede escribirse como

$$J_N = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{\Big\langle x(k), \hat{Q}x(k)\Big\rangle + \langle x(k), 2Mu(k)\rangle + \Big\langle u(k), \hat{R}u(k)\Big\rangle\}. \tag{47}$$

En este caso se elimina el costo terminal, ya que a medida que N tiende hacia infinito, el estado final $x(N)$ ha de tender hacia el estado de equilibrio 0, razón por la que ya no se necesita le restricción terminal. Un requerimiento importante del diseño del regulador lineal de tiempo infinito

es que el sistema de lazo cerrado sea asintóticamente estable. Por tanto, la solución del problema del regulador lineal de tiempo finito puede obtenerse al hacer que $k \to -\infty$. Cuando $N \to \infty$, la matriz de ganacia de Riccati $K(k)$ se vuelve constante; esto es

$$\lim_{k \to -\infty} K(k) = K. \tag{48}$$

Si en la ecuación (47) se reemplaza $K(k+1)$ y $K(k)$ con K, se obtiene la ecuación de Riccati de estado estacionario o tiempo infinito

$$K = \phi' K \phi + \hat{Q} - (\phi' K \theta)(\hat{R} v + \theta' K \theta)^{-1}(\theta' K \phi + M'). \tag{49}$$

Expresión conocida como *ecuación algebraica de Riccati* De la ecuación (44), el control óptimo es

$$u^{o}(k) = -(\hat{R} + \theta' K \theta)^{-1}(\theta' K \phi + M'). \tag{50}$$

En este caso, la matriz de retroalimentación

$$G = (\hat{R} + \theta' K \theta)^{-1}(\theta' K \phi + M'), \tag{51}$$

es constante.

5.2. Diseño del control mediante dlqr

Para obtener el control por retroalimentación de estados primero se ha resuelto la ecuación algebraica de Riccati dada por la ecuación (50) mediante el comando *dlqr* de MATLAB. Luego de esto obtenemos el vector de retroalimentación de estados con la ecuación (52).

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}1658 & 0{,}2054 & 0{,}0792 & 0{,}0334 \\ 0{,}2054 & 1{,}1226 & 0{,}2966 & 0{,}1518 \\ 0{,}0792 & 0{,}2966 & 0{,}1115 & 0{,}0464 \\ 0{,}0334 & 0{,}1518 & 0{,}0464 & 0{,}0329 \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$G = \begin{pmatrix} -1{,}1719 & -19{,}8717 & -1{,}9436 & -3{,}2732 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Entonces podemos sustituir G en la ecuación (51) y tenemos el control óptimo. Como ya sabemos $u^{o}(k) = Gx^{o}(k)$, el cual sustituimos en nuestro sistema discreto obteniendo el sistema en lazo cerrado siguiente:

$$x^{o}(k+1) = (\phi - \Gamma G)x^{o}(k). \tag{54}$$

El cual podemos resolver para los valores de $k = 0, 12, ..., N$ Donde ahora nuestro nuevo sistema discreto es de la forma:

$$x^{o}(k+1) = \phi' x^{o}(k), \tag{55}$$

con $\phi' = \phi - \Gamma G$

La simulación se lleva a cabo en Simmulink usando el módulo llamado *Discrete space state*.

Se introduce la ecuacion discreta tal como lo indica la ecuación (56) por tanto la matriz Γ vale cero. Queremos observar los 4 estados por tanto C es la matriz identidad de 4x4. Por último, el periodo de muestreo es de 0,1. Las salidas para las variables de estado son:

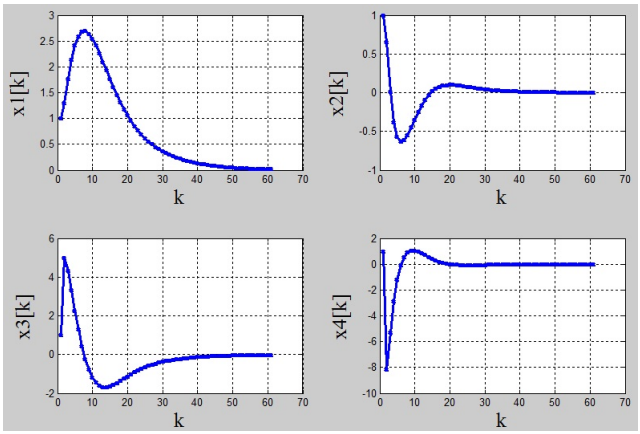

Figura 3: Variables de estado

Salidas para las variables de estado en lazo cerrado.

6. Conclusiones.

Se ha obtenido el modelo dinámico del péndulo invertido, del cual se ha obtenido su aproximación lineal. Mediante la aplicación de principio de mínimo se resolvieron las $2n$ ecuaciones en *mathematica*, pero ello implica un tiepo de maquina costoso y por tanto la retroalimentacion es difícil de llevar acabo. Sin embargo al hacer que $k \longrightarrow -\infty$ y cuando $N \longrightarrow \infty$ se obtiene un control de estado, esto al obtener una ecuación matricial de Ricatti y resolverla por algún tipo de software. Dicho control se asegura que es apropiado para el índice de desempeño seleccionado.

Referencias

[1] J. Aracil and F. Gordillo.**El Péndulo Invertido. Un Desafío para el Control no Lineal**. Revista Interamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 2, pp. 8-19, 2005

[2] Benjamin Kuo, **Sistemas de Control Digital**, Segunda Edición. Edit Prentice Hall Hispanoamericana, 2003

[3] Shared Santamaria Castillo. Anlisis y control del sistema dinámico péndulo invertido. Tesis de Licenciatura. Facultad de ciencias de la electrónica, BUAP. Puebla, Puebla, 2007.

[4] Héctor Sánchez, Iñaki Aguirre , Patete Anna.**Construcción y Control de un Péndulo Invertido Utilizando la Plataforma Lego**. 4to Congreso Iberoamericano de Estudiantes de Ingeniería Eléctrica (IV CIBELEC) 5tas Jornadas de Ingeniería Eléctrica (V JIELECTRIC 2010) MINDSTORMS NXT. Enero 2010.

[5] Andrea Bonarini, Alessandro Lazaric y Marcelo Restelli. **Batch Reinforcement Learning for Controlling a Mobile Wheeled Pendulum Robot**,2008, in International Federation for Information Processing, Volume 276; Artificial Inteligence and practice II]

[6] Katsuhico Ogata. **Ingeniería de Control Moderna**, Cuarta edición, University of Minnesota, Prentice Hall, 1998.

[7] Katsuhico Ogata. **Sistemas de Control en Tiempo Discreto**. Prentice Hall Hispanoamericana, Segunda edición, 1998.