

Solución regularizada del problema inverso electroencefalográfico

María Monserrat Morín Castillo¹

José Jacobo Oliveros Oliveros²

José Julio Conde Mones²

José Eligio Moisés Gutiérrez Arias¹

Eladio Flores Mena¹

Andrés Fragueta Collar²

¹Facultad de Ciencias de la Electrónica-BUAP

²Facultad de Ciencias Físico Matemáticas-BUAP

mmorin@ece.buap.mx, oliveros@fcfm.buap.mx, juliocondem@yahoo.com.mx

jmgutierrez@ece.buap.mx, eflores@ece.buap.mx, fraguela@fcfm.buap.mx

Resumen

El Problema Inverso Electroencefalográfico (PIE), consiste en hallar las fuentes bioeléctricas concentradas en el cerebro a partir de mediciones sobre el cuero cabelludo del potencial generado por esas fuentes (EEG). El PIE es un problema mal planteado ya que dada una medición sobre el cuero cabelludo, hay diferentes fuentes bioeléctricas que la producen y además porque pequeñas variaciones en las mediciones, pueden producir grandes variaciones en la localización de la fuente. Los problemas inversos mal condicionados o mal planteados surgen con frecuencia en diferentes ramas de la ciencia e ingeniería, en particular en la electroencefalografía; al querer recuperar la fuente activa, se presenta un mal planteamiento; para recuperar la fuente de manera estable usamos técnicas de regularización. La regularización es una técnica matemática que proporciona estabilidad numérica a un problema lineal mal condicionado, mediante la adición de un funcional penalizador en su formulación. Las técnicas de regularización difieren entre sí según la forma matemática que dicho funcional tenga y la cantidad de información que requieran incorporar. Una característica común de las técnicas de regularización, es que todas ellas requieren un parámetro de regularización, el cual controla el pe-

so dado a la minimización del término penalizador añadido y busca equilibrar el error de minimización y el error de regularización. Existe una variedad de técnicas para la selección de este parámetro, de las cuales las más frecuentemente utilizadas son el principio de discrepancia de Morosov, la Curva-L, técnica de corte, entre otros.

1. Introducción

Las metodologías de regularización descritas encuentran uso en el área de modelación inversa de parámetros geofísicos, la recuperación de perfiles de composición atmosférica a partir de instrumentos satelitales, y el cálculo de la distribución de tamaño de partícula, entre otras aplicaciones. Este mal planteamiento es resuelto usando técnicas conocidas como de regularización, estas dependen de algunas condiciones, principalmente de como se modela matemáticamente la fuente y de las condiciones de contorno. En este trabajo se propone el uso de técnicas de regularización para resolver de manera estable, el problema de identificación de una fuente bioeléctrica considerando que dicha fuente esta representada por dipolos de corriente. Esta fuente corres-

ponde al potencial generado por grandes conglomerados de neuronas trabajando simultáneamente llamados generadores del EEG o fuentes bioeléctricas. En general estas fuentes pueden estar localizadas en el volumen o en la corteza cerebral. El problema inverso consiste en la identificación de la fuente a partir de datos medidos sobre el cuero cabelludo a través de un electroencefalograma (EEG). Como se menciono antes, este problema es mal planteado, por lo cual es necesario proponer algunas técnicas de regularización, para obtener la solución de manera estable.

2. Planteamiento del Problema

Se considera para la modelación que el EEG es producido por grandes conglomerados de neuronas que se activan simultáneamente. A estos conglomerados se les conoce como generadores o fuentes bioeléctricas ([8, 11]).

Para el análisis del problema consideremos que la cabeza es un medio conductor homogéneo Ω con conductividad constante σ_1 . Se ha demostrado matemáticamente que la reducción a una sola región es valida y permite simplificar el planteamiento y análisis del problema.

Se considera que la conductividad del aire σ_2 es cero. Bajo estas consideraciones se sabe que existe un potencial electrostático u en la región Ω tal que $\mathbf{E} = \nabla u$ ([2]), el cual satisface el siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{en } S, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota a la derivada de u con respecto a la normal n (unitaria exterior) donde q denota la carga del dipolo y d la distancia que las separa, a $S = \partial\Omega$ y $f = -\frac{\text{div} \mathbf{J}^p}{\sigma_1}$.

La condición de frontera sobre S se obtiene de la igualdad de los flujos de la densidad de corriente. En este trabajo se desprecian las fuentes corticales.

En nuestro caso, como la fuente corresponde a un foco epiléptico; para recuperarla es necesario encontrar los, cuyos parámetros que caracterizan a dicha fuente: q , d ; donde q denota la carga del dipolo y d la distancia que las separa. (posición y momento dipolar). Para dar solución a problema, consideramos que la fuente se ubica en un punto fijo determinado y entonces se busca el mínimo de una ecuación, la cual será propuesta más adelante. Un foco epiléptico concentrado en el punto a puede representarse en la forma [11]:

$$\mathbf{J}^p = \mathbf{p}\delta(x - a), \quad (2)$$

donde $\mathbf{p}$ representa al momento dipolar y $\delta(x - a)$ es la función delta de Dirac concentrada en a . La idea básica para hallar la solución en este caso es la siguiente: ya que $\delta(x - a)$ es el límite (en sentido de distribuciones) de funciones suaves de soporte compacto concentradas alrededor de a , para cada una de dichas funciones suaves, se busca la solución clásica en términos de una función de Green; resultados, referentes a la existencia y unicidad de la solución, función de Green, pueden ser encontrados en [6].

Con la expresión del potencial dada a través del siguiente problema es posible plantear el problema de identificación paramétrica. Uno de los métodos más utilizados es el de mínimos cuadrados, se basa en la minimización de la norma residual entre los datos obtenidos de forma experimental y los datos esperados con base en un modelo.

2.1 Teorema. A la solución en sentido de $D_0'(\Omega)$ del PCE cuando $\mathbf{J}^p = \mathbf{p}\delta(x - a)$ viene dada por :

$$u(x) = \left[-\frac{\mathbf{p}(y)}{\sigma_1} \cdot \nabla_y G(y, x) \right] \Bigg|_{y=a}. \quad (3)$$

En nuestro caso, como la identificación se realiza a través del momento dipolar, es necesario encontrar dichos parámetros: q , d , esto nos lleva al planteamiento de un problema lineal. Para dar solución al problema, en este trabajo se considera que la fuente se ubica en un punto fijo determinado y entonces se busca el mínimo de la ecuación:

$$J(X) = \|AX - Y\|^2, \quad (4)$$

donde AX representa los datos analíticos y Y los datos experimentales.

Para dar solución al problema inverso, en este trabajo se considera que la fuente se ubica en un punto fijo determinado. Dicha solución es una aproximación a la solución exacta del problema, pero debido a que el problema es mal planteado, esta solución puede estar muy alejada de la solución real, de modo que es necesario regularizar la solución.

Uno de los métodos de regularización ampliamente utilizado para resolver ecuaciones operacionales mal planteadas, es el de Tijonov., el cual consiste en aproximar una solución X^δ a la solución exacta X para la ecuación $AX = Y$, sabiendo que el lado derecho puede ser una perturbación de Y^δ de Y , con un nivel de error conocido dado por $\|Y - Y^\delta\| \leq \delta$ donde Y denota a los datos exactos, Y^δ los datos con error, δ el error.

Las ideas del método de solución de mínimos cuadrados son:

$$X^\alpha = \arg \min \{ \|AX - Y\|^2 + \alpha \|X\|^2 \},$$

donde $\alpha > 0$ y $\alpha \|X\|^2$ es un funcional que “penaliza” el defecto. Así, tomando en cuenta que se trabaja con datos perturbados Y^δ , se define al funcional de Tijonov como

$$J_\alpha(X^\delta) = \|AX^\delta - Y^\delta\|^2 + \alpha \|X^\delta\|^2, \quad (5)$$

donde X^δ denota a la solución aproximada.

Para calcular el parámetro α se puede establecer $\alpha = \alpha(\delta) > 0$.

Además el valor ínfimo para X_α^δ , debe satisfacer que

$$\|AX_\alpha^\delta - Y^\delta\| = \delta.$$

2.1. Identificación de la fuente usando técnicas de regularización

Se utiliza el algoritmo propuesto en [6] para la identificación de fuentes bioeléctricas tipo dipolar, la identificación se basa en la solución del problema directo obtenida y se utilizara el método de regularización de Tijonov usando como parámetro de regularización obtenido por el principio de discrepancia de Morosov

a través del método de Newton y la curva L. El principio de discrepancia de Morozov plantea una forma para la elección del parámetro $\alpha(\delta)$.

Una herramienta gráfica para el análisis de problema inverso es el de la curva L , es una gráfica en la que se muestran todos los parámetros de regularización válidos y su efecto sobre la norma de la solución regularizada contra la correspondiente norma residual.

En la validación del problema de identificación se utilizo el sistema implementado en [6], que simula una fuente bioeléctrica tipo dipolar inmersa en un medio conductor. Con este sistema y la función de Green construida para la solución del problema directo, para identificar a la fuente es necesario minimizar la ecuación [4]; además para mostrar el funcionamiento se realizaron las pruebas de validación el algoritmo. Para esta prueba se usaron los siguientes datos:

- Posición de la fuente: $P_O(0, 0.03, 0.01)$ m.
- Conductividad del medio: $2 \times 10^{-12} \frac{1}{\Omega m}$.
- Posición de los electrodos: Se muestran en la tabla 5.1.

No de electrodo	x (m)	y (m)	z(m)
1	0.10	0.00	0.015
2	0.07	0.07	0.015
3	0.00	0.10	0.015
4	-0.07	0.07	0.015
5	-0.10	0.00	0.015
6	-0.07	0.07	0.015
7	0.00	-0.10	0.015
8	0.07	0.07	0.015

Tabla 5.1.Coordenadas de cada electrodo.

- Los potenciales medidos en los electrodos se muestran en la tabla 5.2.

No de electrodo	Potencial experimental
1	0,035
2	0,048
3	0,074
4	0,050
5	0,043
6	0,049
7	0,040
8	0,038

Tabla 5.2. Valores de los potenciales en cada electrodo.

A continuación usaremos el método de mínimos cuadrados para realizar la identificación de la fuente, en este caso se determina el momento dipolar que caracteriza a dicha fuente. Debido a que este método no considera el hecho de la existencia de la perturbación en los datos, la solución que éste proporciona, es una solución con un amplio rango de error. El resultado de este método, permite observar el efecto del parámetro de regularización sobre la solución del problema. La solución dada por el algoritmo propuesto es:

$$\mathbf{p} = 22.09 \hat{\mathbf{a}}_x + 2.22 \hat{\mathbf{a}}_z \text{ pCm.}$$

En nuestro caso, con base en los datos que se tienen, se sabe que el momento dipolar que posee la fuente es de $\mathbf{p} = 0.10 \hat{\mathbf{a}}_x \text{ pC m.}$ Esto nos permite conocer el error relativo de la solución obtenida, con respecto al valor real del momento dipolar, dicho error es el cociente de la diferencia entre ambos valores y el valor real, el cual es de 219.91, que es bastante alto. Es importante resaltar, que aunque la variación en los datos de entrada con respecto a los datos exactos es pequeña, la solución obtenida posee un error muy grande.

2.2. Método de la curva L

Una forma de observar explícitamente, el efecto del parámetro regularización sobre la solución del problema es por medio de la curva L, mediante la observación de dicha curva es posible obtener un valor aproximado para el parámetro de regularización a fin de obtener la mínima norma residual.

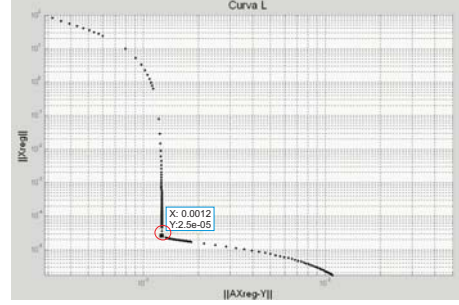


Figura 1: Parametro de regularización obtenido por la curva L.

La forma de la curva L para este problema se muestra en la figura 1. Se observa, que el punto con mayor curvatura, se ubica cerca del valor 0.0012; este valor, proporciona una aproximación al valor óptimo para el parámetro de regularización, de igual forma este valor proporciona un estimado de la norma residual.

El valor del parámetro α establecido, se sustituye en la expresión para regularización de Tijonov [(5)], para obtener la solución regularizada del problema, el algoritmo proporciona el siguiente momento dipolar, considerando un $\alpha = 0.0012$

$$\mathbf{p} = 0.14 \hat{\mathbf{a}}_x + 0.02 \hat{\mathbf{a}}_z \text{ pCm.}$$

Para esta solución y aplicando el mismo criterio del caso anterior, se observa que el error relativo es 0.44, el cual se redujo en gran medida. Esto muestra la utilidad de este método, ya que para el valor específico del parámetro de regularización α , se obtuvo una solución regularizada que se acerca a la solución esperada. Finalmente, se realiza la elección del parámetro de regularización de forma analítica, esto a través del principio de discrepancia de Morozov descrito anteriormente. El valor óptimo para el parámetro de regularización se busco por medio del método de Newton.

Al aplicar el principio de discrepancia de Morozov, en el algoritmo de identificación, el valor obtenido

para el parámetro de regularización es de $\alpha = 0.014$, y el momento dipolar que caracteriza a la fuente, es:

$$\mathbf{p} = 0.11\hat{\mathbf{a}}_x + 0.02\hat{\mathbf{a}}_z \text{ pCm.}$$

2.3. Comparación de resultados

Ahora se realiza una comparación entre los resultados de los métodos aquí descritos, cuyo resultado es mostrado en la tabla 5.3. En este caso, se sabe que el momento dipolar de la fuente es $\mathbf{p} = 0.10\hat{\mathbf{a}}_x \text{ pCm}$, lo que permite calcular el error relativo para cada método.

Método	α	Momento dip $\mathbf{p}$	Error
Mínimos C.		$22.09\hat{\mathbf{a}}_x + 2.22\hat{\mathbf{a}}_z$	219.91
Curva L	0.0012	$0.14\hat{\mathbf{a}}_x + 0.02\hat{\mathbf{a}}_z$	0.45
R. Tjonov	0.0014	$0.11\hat{\mathbf{a}}_x + 0.02\hat{\mathbf{a}}_z$	0.22

Tabla 5.3. Comparación de los métodos.

Se observa, que al solucionar el problema de identificación por el método de mínimos cuadrados, el resultado presenta un error muy grande, lo cual era de esperarse, ya que la solución no está regularizada, pero al aplicar la técnica de regularización, el error se reduce de forma significativa, lo cual muestra la influencia del parámetro de regularización sobre la solución del problema. Con la solución obtenida por medio del algoritmo, se identifican los parámetros que conforman el momento dipolar, identificando así la fuente. Para problemas mal planteados, la curva L resulta en una forma de “L”, cuando es graficada en una escala logarítmica, con una esquina distintiva que separa la parte vertical de la horizontal de la curva.

La parte vertical de la curva, corresponde a la norma de la solución regularizada donde $\|X_\alpha\|$ es más sensible a los cambio en el parámetro de regularización porque el error de perturbación domina X_α . La parte horizontal de la curva, corresponde a la solución donde la norma residual $\|AX_\alpha - Y\|$ que es más sensible al parámetro de regularización, porque X_α es dominada por el error de regularización. Existe un parámetro de regularización óptimo que

equilibra el error de perturbación y el error de regularización. Una característica esencial de la curva L es que este parámetro de regularización óptimo, se encuentra cercano al parámetro que corresponde a la esquina de la curva L. Es decir, al localizar el punto con mayor curvatura en la curva L, se puede calcular una aproximación al parámetro de regularización óptimo [(5)].

3. Conclusiones

Se consideró el caso fuentes que corresponden a focos epilépticos y que se modelan por medio de dipolos. Se compararon los resultados experimentales con los teóricos correspondientes al problema directo electroencefalográfico. Se uso un sistema físico que representa a la región conductora y un dipolo en su interior. Para identificar los parámetros de la fuente dipolar, es decir, al momento dipolar se propuso un algoritmo estable el cual se usa la técnica de mínimos cuadrados no lineales y dos técnicas de regularización: Regularización de Tjonov y Curva L; para que la identificación sea estable.

4. Referencias

1. A. Amir. Uniqueness of the generators of brain evoked potential maps. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 41 (1994), 1-11.
2. Collar, Andrés Fragueta; Morín Castillo, Monserrat ; Jacobo Oliveros Oliveros,. Inverse electroencephalography for volumetric sources. *Math. Comput. Simulation* 78 (2008), no. 4, 481-492.
3. El Badia, A.; Ha Duong, T. Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements. *Inverse Problems* 14 (1998), no. 4, 883-891.
4. Fragueta, A.; Oliveros, J.; Morín, M.; Cervantes, L. Inverse electroencephalography for cortical sources. *Applied Numerical Mathematics* 55 (2005), no. 2, 191-203.

5. Morales Timal Gabriela. Propuesta de un algoritmo estable para solucionar el problema de identificación de fuentes bioeléctricas *Tesis de maestría*, BUAP (2011).
6. Morín Castillo M. Monserrat; Oliveros Oliveros J. Jacobo, Flores Mena Eladio; Gutierrez Arias Moisés; Morales Timal Gabriela. Identificación de los parámetros de una fuente dipolar, usando mínimos cuadrados. *Décima Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática* (2011), no. 1, 46-50.
7. R. Grave-de Peralta; S. González-Andino; C.M. Gómez-González. Bases biofísicas de la localización de los generadores cerebrales del electroencefalograma. Aplicación de un modelo de tipo distribuido a la localización de focos epilépticos. *Rev Neurol* (2004), 748-756.
8. P. L. Nunez. Electric field of the brain. *N.Y. Oxford Univ. Press*, (1981).
9. R. Plonsey; D. G. Fleming. Bioelectric phenomena. *N.Y. Mc Graw-Hill*, (1969).
10. Roberto D. Pascual-Marqui; Sara L. Gonzalez-Andino; Pedro A. Valdes-Sosa; Rolando Biscay-Lirio. Current source density estimation and interpolation based on the spherical harmonic Fourier expansion. *Inter. J. Neuroscience* 45 (1998), 237-249.
11. J. Sarvas. Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem. *Phys. Med. Biol.* 32 (1987), 11-22.